STATISTIQUES
PROBABILITÉS

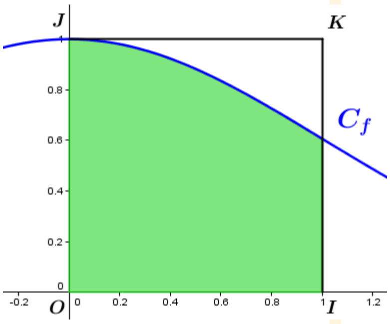
15

Loi des grands nombres

Les savoir-faire du chapitre

- **150.** Connaître et savoir utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- **151.** Connaître et savoir utiliser l'inégalité de concentration.

Le problème de Nabolos



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
L'objectif est de déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine en vert défini par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite verticale d'équation $x = 1$.
Pour cela on va utiliser la méthode de Monte-Carlo.
La méthode de Monte-Carlo est une méthode probabiliste basée sur l'observation d'un grand nombre d'issues.
Elle permet, par le calcul de probabilités, de déterminer des valeurs approchées d'aires.
On considère l'épreuve de Bernoulli consistant à choisir au hasard un point de coordonnées $(x; y)$ dans le carré $OJKI$ de côté 1.
On appelle succès l'événement "Le point choisi est sous la courbe représentative de la fonction f" et échec "Le point choisi est au dessus de la courbe représentative de la fonction f".
On va réaliser n fois cette expérience de Bernoulli de manière successive et indépendante.
On admet que la probabilité de cet événement est $p = \dfrac{\text{aire sous la courbe}}{\text{aire du carré}}$.
Comme l'aire du carré $OJKI$ est de 1, on a $p =$ aire sous la courbe.

1)
- Quelle est la loi de probabilité de chaque variable aléatoire X_i.
- Soit S_n la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
  - Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n ?
  - Déterminer son espérance, sa variance et son écart type en fonction de n et de p.

2) Soient a un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.
- Démontrer que $p\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant a\right) \leq \dfrac{1}{4na^2}$.
- En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} p\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant a\right) = 0$.

3) En déduire une condition sur n pour que $\dfrac{S_n}{n}$ soit une valeur approchée de la proportion p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99.

150 **Connaître et savoir utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.**

On lance 3600 fois une pièce de monnaie non truquée.

Soit X la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de Pile obtenus.

1) Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable aléatoire X.

2) Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1600 et 2000.

151 **Connaître et savoir utiliser l'inégalité de concentration.**

On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge et 0 sinon, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X.

1) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$, puis écrire l'inégalité de concentration relative à M_n.

2) A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?