Orthogonalité et distances dans l'espace

GÉOMÉTRIE

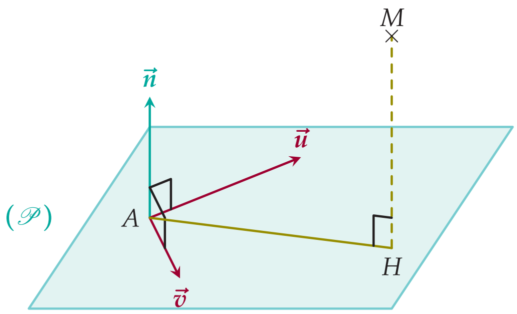
4

Les savoir-faire du chapitre

- ▶ **40.** Calculer et utiliser un produit scalaire.
- ▶ **41.** Etudier l'orthogonalité de droites et de plans.
- ▶ **42.** Déterminer et utiliser un vecteur normal à un plan.
- ▶ **43.** Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou un plan.

Le problème de Nabolos

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère un plan $(\mathscr{P})$ passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul, simultanément orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



1. Démontrer que $\vec{n}$ est aussi orthogonal à tout vecteur $\vec{w}$ de $(\mathscr{P})$.
En déduire que si M est un point de $(\mathscr{P})$, alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.
2. Démontrons maintenant la réciproque.
Énoncer cette réciproque.
Soit M un point de l'espace.
On considère le point H, projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathscr{P})$.
Démontrer, en calculant $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}$, que si $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA}=0$, alors $HM=0$ puis en déduire que $M\in(\mathscr{P})$.
Énoncer la propriété démontrée.

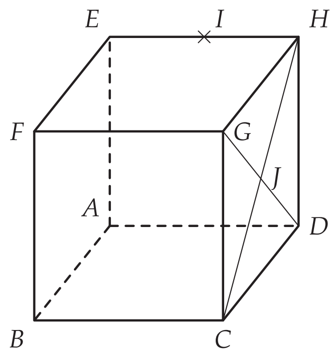
S'entraîner

40 **Calculer et utiliser un produit scalaire.**

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ 2\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$. On note θ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculer :

1) $\|\vec{u}\|$ **2)** $\|\vec{v}\|$ **3)** $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **4)** θ

40 **Calculer et utiliser un produit scalaire.**



On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a > 0$. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

Exprimer en fonction de a les produits scalaires :

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH}$

3) $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{GC}$

4) $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FC}$

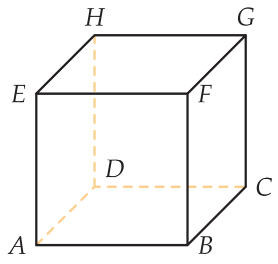
5) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}$

6) $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{GD}$

41 **Etudier l'orthogonalité de droites et de plans.**

$ABCDEFGH$ est un cube.

1) **a)** Citer six droites orthogonales à la droite (EA) ;
b) Citer six droites orthogonales à la droite (EB) ;
c) Citer deux droites orthogonales au plan (BCG) ;
d) Citer deux droites orthogonales au plan (AFG).



2) **a)** Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCG).
b) En déduire que les droites (AB) et (CF) sont orthogonales.

3) Les droites suivantes sont-elles orthogonales ? Le démontrer.

a) (EG) et (GC) ;
b) (EB) et (EG) ;
c) (AF) et (BC) ;
d) (AC) et (HF) ;
e) (BD) et (EC) ;
f) (CE) et (AG).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

42 **Déterminer et utiliser un vecteur normal à un plan.**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1\,;2\,;1)$, $B(4\,;6\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.
2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

....
....
....
....
....
....
....
....

S'entraîner

43 **Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou un plan.**

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(2;3;3)$, $B(-1;17;-17)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1) Démontrer que le point $H(-9;5;-1)$ appartient à $\mathscr{P}$.

2) **a)** Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$

b) En déduire la distance du point B au plan $\mathscr{P}$.

3) Soit $C(5;11;-5)$.

a) Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC).

b) Calculer la distance du point H à la droite (BC).