ANALYSE 7

Dérivation, continuité et convexité

Les savoir-faire du chapitre

- **70.** Connaître et utiliser les dérivées des fonctions composées.
- **71.** Etudier et utiliser la convexité d'une fonction.
- **72.** Etudier une suite définie par une relation de récurrence.
- **73.** Connaître et utiliser le TVI.

Le problème de Nabolos

n désigne un nombre entier relatif.
La fonction partie entière, notée E, est définie par :

$$E(x) = n \qquad \text{pour tout } x \text{ de } [n\,;\,n+1[$$

1) Pour chacun des nombres suivants, préciser l'unique intervalle de la forme $[n\,;\,n+1[$ où $n \in Z$ qui le contient et donner sa partie entière :

$$2{,}5 \;;\; 4 \;;\; \pi \;;\; \frac{3}{4} \;;\; -2 \;;\; -0{,}1 \;;\; -2{,}26$$

2) Donner les solutions des équations d'inconnue x :
a. $E(x) = 0$ **b.** $E(x) = n$ **c.** $E(x) = 0{,}3$.

3) Dans un repère, représenter graphiquement la fonction partie entière sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$.

4) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x<n}} E(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x>n}} E(x)$, puis comparer ces valeurs avec $E(n)$.

5) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xE(x)$$

où $E(x)$ est la partie entière de x. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-3\,;\,3]$.

70 **Connaître et utiliser les dérivées des fonctions composées.**

Donner les fonctions dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

1) $f(x) = (x^2+3)^3$.

2) $g(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

3) $h(x) = \mathrm{e}^{-x^2+3x}$.

4) $u(x) = \dfrac{1}{(x+6)^3}$.

5) $v(x) = x\mathrm{e}^{2x}$.

6) $w(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+2}}$.

71 **Etudier et utiliser la convexité d'une fonction.**

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- **a)** Montrer que f est convexe.
- **b)** Déterminer une équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0.
- **c)** En déduire que quel que soit le réel x : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.
- **d)** Démontrer que pour tous réels a et b : $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b}{2}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- **a)** Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
- **b)** la courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des points d'inflexion ?

72 **Etudier une suite définie par une relation de récurrence.**

Soit (u_n) la suite définie par ${}_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x+3}$.

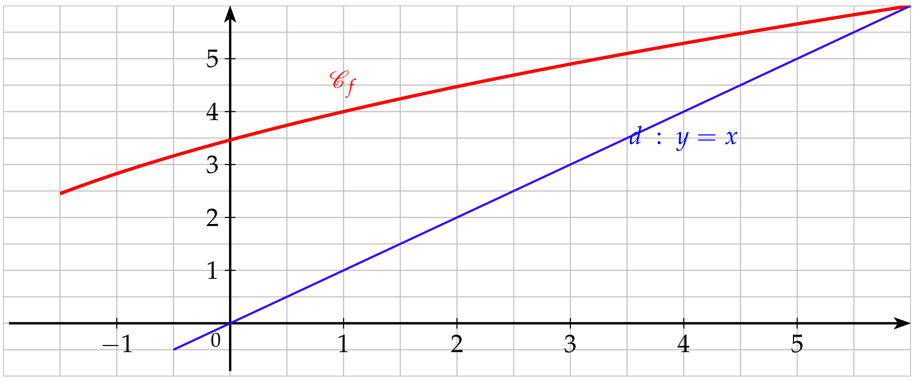
On donne sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ainsi que la droite d’équation $y = x$.

1) Sur l’axe des abscisses, placé u_0, u_1, u_2 et u_3.

2) Etudier les variations de f sur $[-2\,;\,+\infty[$.

3) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6.

4) Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ puis déterminer ℓ.



S’entraîner

73 **Connaître et utiliser le TVI.**

Soit la fonction f définie sur $I = [-4\,;\,1]$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$$

dont les variations sont données par le tableau suivant :

x	-4		-3		-1		1
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19

1) Justifier que f est continue sur I.

2) Dénombrer les solutions de l’équation $f(x) = 2$.

3) **a)** Justifier que l’équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.

b) Déterminer un encadrement de α à l’unité près.

73 **Connaître et utiliser le TVI.**

1) Montrer que l’équation :

$$-2x^3 - 6x^2 + 18x + 59 = 0$$

admet une unique solution réelle α.

2) Avec une calculatrice, encadrer α au dixième près.