ANALYSE

3

Suites. Limites de suites

Les savoir-faire du chapitre

- **30.** Déterminer une limite en utilisant la définition.
- **31.** Étudier la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient.
- **32.** Déterminer une limite par minoration, majoration, encadrement.
- **33.** Connaître et utiliser le théorème de convergence des suites monotones.
- **34.** Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique.
- **35.** Déterminer un seuil à l'aide d'un algorithme.

Le problème de Nabolos

Lors de la construction d'un barrage, on a créé un lac artificiel contenant initialement 80 000 m^3 d'eau. Chaque année, on prélève 10 % du volume de ce lac pour produire de l'électricité. Ce lac est par ailleurs alimenté par une rivière qui lui apporte 6 000 m^3 d'eau par an.

Décrire l'évolution à long terme du volume d'eau contenu dans ce lac.

S'entraîner

30 **Déterminer une limite en utilisant la définition.**

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{2}{n}$.

1) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $-0,02 < u_n < 0,02$.

2) On se donne un intervalle $]-\alpha\,;\,\beta[$ avec α et β strictement positifs.
Démontrer qu'il existe alors un entier naturel n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, $-\alpha < u_n < \beta$.
Que peut-on en déduire ?

30 **Déterminer une limite en utilisant la définition.**

En utilisant la définition du cours, démontrer que :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right) = 1$

31 **Étudier la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient.**

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n^2 + 3n$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} 5n - n^2$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2 + n^2}{4n^2}$

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\sqrt{n} + \dfrac{5}{n} - 6$

5) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n^2}(1 + n^2)$

6) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 + n^2 + 1}{3n^2}$

32 **Déterminer une limite par minoration, majoration, encadrement.**

1) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n - \sin(n)$.

2) (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n+1}$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n-1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant 1$.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

S'entraîner

33 **Connaître et utiliser le théorème de convergence des suites monotones.**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{10}(u_n + 1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

34 **Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique.**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} 2 \times 5^n \qquad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2^n}{3}\right) \qquad \lim_{n \to +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

34 **Déterminer un seuil à l'aide d'un algorithme.**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + n + 1$ pour tout entier naturel n.

Compléter l'algorithme ci-contre afin que la variable n contienne après exécution le plus petit entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit strictement supérieur à A.

```
n ⟵ 0
u ⟵ 2
Tant que ......
        u ⟵ .......
        n ⟵ .......
Fin Tant que
```