Loi binomiale

www.mathGM.fr

Lycée Louise Michel (Gisors)

Les savoir-faire

100. Modéliser une situation et calculer des probabilités dans le cadre d'une succession d'épreuves indépendantes
101. Calculer des probabilités du type $p(X = k)$, $p(X > k)$ ou $p(X < k)$ pour une v.a. X suivant une loi binomiale.
102. Utiliser la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil.

Le problème du chapitre

Lorsque les éléphants sautent en parachute au-dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser.
Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis, pour les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes.
La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact avec le sol est égale à 0,3.
Sachant qu'un éléphant s'enlise s'il a perdu plus de la moitié de son équipement, comparer les probabilités de s'enliser avec chacun des types de raquettes.

Définition et propriété

Définition

Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont indépendantes.

Univers et issues d'une succession d'épreuves indépendantes :
On considère n épreuves successives indépendantes E_1, E_2, ... , E_n.
L'univers E de cette succession de n épreuves successives indépendantes est le produit cartésien : $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.

Les issues de E sont les $n-$uplets $(x_1; x_2; ....; x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour tout i entier naturel avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

Définition et propriété

Définition

Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont indépendantes.

Univers et issues d'une succession d'épreuves indépendantes :
On considère n épreuves successives indépendantes E_1, E_2, ... , E_n.
L'univers E de cette succession de n épreuves successives indépendantes est le produit cartésien : $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.

Les issues de E sont les $n-$uplets $(x_1; x_2; ....; x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour tout i entier naturel avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

Propriété

Dans une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1,\ x_2,\ .....,\ x_n)$ est égale au produit des probabilités des issues de ses composantes x_1, x_2, ..., x_n.

Exemple

Exemple :
On lance successivement et dans cet ordre trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et on note les trois résultats obtenus.

- Le résultat de chaque lancer n'a pas d'influence sur les autres donc les trois épreuves sont indépendantes.

Exemple

Exemple :
On lance successivement et dans cet ordre trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et on note les trois résultats obtenus.

- Le résultat de chaque lancer n'a pas d'influence sur les autres donc les trois épreuves sont indépendantes.
- L'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes est :
  $\{1; 2; 3; 4\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Exemple

Exemple :
On lance successivement et dans cet ordre trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et on note les trois résultats obtenus.

- Le résultat de chaque lancer n'a pas d'influence sur les autres donc les trois épreuves sont indépendantes.
- L'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes est :
  $\{1;2;3;4\} \times \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.
- $(2;5;7)$ est une issue associée à cette succession d'épreuves indépendantes.

Exemple

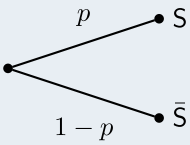
Exemple :
On lance successivement et dans cet ordre trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et on note les trois résultats obtenus.

- Le résultat de chaque lancer n'a pas d'influence sur les autres donc les trois épreuves sont indépendantes.
- L'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes est : $\{1;2;3;4\} \times \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.
- $(2;5;7)$ est une issue associée à cette succession d'épreuves indépendantes.
- La probabilité de cette issue est $p(2;5;7) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{192}$.

Définitions

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p, toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues :

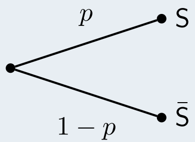


Définitions

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p, toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues :

- l'une appelée « succès » notée S, dont la probabilité est $p(\mathrm{S}) = p$;

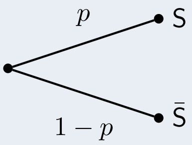


Définitions

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p, toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues :

- l'une appelée « succès » notée S, dont la probabilité est $p(\mathrm{S}) = p$;
- l'autre appelée « échec » notée $\bar{\mathrm{S}}$, dont la probabilité est $p(\bar{\mathrm{S}}) = 1 - p$.

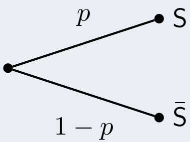


Définitions

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p, toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues :

- l'une appelée « succès » notée S, dont la probabilité est $p(\mathrm{S}) = p$;
- l'autre appelée « échec » notée $\bar{\mathrm{S}}$, dont la probabilité est $p(\bar{\mathrm{S}}) = 1 - p$.



Définition

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque S est réalisé et 0 sinon.

La loi de probabilité de X est donnée sous la forme du tableau :

k	0	1
$p(X = k)$	$1 - p$	p

On dit que la variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Schéma de Bernoulli

Définition

On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p la répétition de n épreuves de BERNOULLI de paramètre p, identiques et indépendantes.

Remarque : On dit que deux expériences aléatoires sont indépendantes lorsque les résultats de l'une n'influencent pas les probabilités de l'autre.

Schéma de Bernoulli

Définition

On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p la répétition de n épreuves de BERNOULLI de paramètre p, identiques et indépendantes.

Remarque : On dit que deux expériences aléatoires sont indépendantes lorsque les résultats de l'une n'influencent pas les probabilités de l'autre.

Exemple

On tire 3 fois de suite une carte avec remise dans un jeu de 4 cartes (dont une représente le poisson Nemo.
On considère comme succès « Obtenir le poisson Nemo ».
X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Calculer $P(X = 2)$. Vidéo

Coefficient binomial

Définition

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle coefficient binomial, noté $\dbinom{n}{k}$, le nombre de chemins du schéma de Bernoulli menant à k succès. Le nombre $\dbinom{n}{k}$ se lit : « k parmi n ».

Coefficient binomial

Définition

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins du schéma de Bernoulli menant à k succès. Le nombre $\binom{n}{k}$ se lit : « k parmi n ».

Exemple

Calculer $\binom{8}{1}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{5}{2}$. Vidéo

Définition et propriété

Définition

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès. On dit que X suit une *loi binomiale de paramètres* n *et* p.

Définition et propriété

Définition

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès. On dit que X suit une *loi binomiale de paramètres* n *et* p.

Propriété

Soit X une v.a. suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.
Alors, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Définition et propriété

Définition

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès. On dit que X suit une *loi binomiale de paramètres* n *et* p.

Propriété

Soit X une v.a. suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$.
Alors, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Exemple

On dispose dans une urne 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes.
On tire 4 fois de suite avec remise une boule de l'urne.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages gagnants.
Calculer $P(X = 3)$. Vidéo