Chapitre 13

Fonctions trigonométriques

Les savoir-faire

130. Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique.

131. Connaître et utiliser la courbe et les propriétés de ces fonctions (parité, périodicité, ...)

132. Etudier des fonctions simples définies à partir de fonctions trigonométriques.

I. La fonction cosinus

1. Définition et propriétés

Définition

La fonction cosinus, notée cos, est la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe le réel $\cos(x)$.

Propriétés

La fonction cos est :

- dérivable sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- 2π-périodique : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ Sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

2. Variations

On déduit les variations de la fonction cos sur $\mathbb{R}$ de ses variations sur $[0\ ;\ \pi]$. En effet, elle est 2π-périodiques et elle est paire.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x)$		$-$	
$\cos(x)$	1	0	-1

II. La fonction sinus

1. Définition et propriétés

Définition

La fonction sinus, notée sin, est la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe le réel $\sin(x)$.

Propriétés

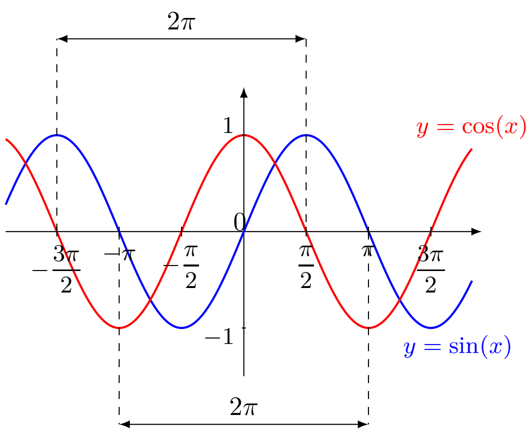
La fonction sin est :
- dérivable sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.
- impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère ;
- 2π-périodique : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

2. Variations

On déduit les variations de la fonction sin sur $\mathbb{R}$ de ses variations sur $[0\ ;\ \pi]$. En effet, elle est 2π-périodiques et elle est impaire.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

III. Les représentations graphiques



IV. Compléments sur la dérivation

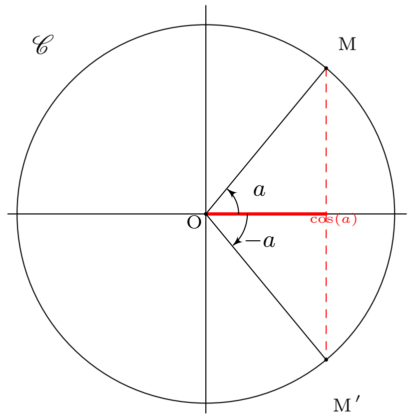
Propriétés

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- La fonction f définie par $f(x) = \cos(u(x))$ est dérivable sur I et : $f'(x) = -u' \sin(u(x))$.
- La fonction g définie par $g(x) = \sin(u(x))$ est dérivable sur I et : $f'(x) = u' \cos(u(x))$.

V. Equations trigonométriques

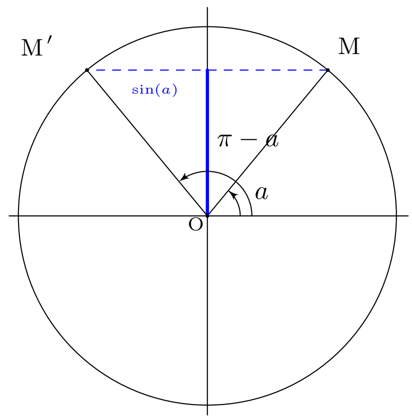
1. Equation $\cos x = \cos a$

L'équation $\cos x = \cos a$ a pour solutions les nombres réels :
$x = a + 2k\pi$ et $x = -a + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.



2. Equation $\sin x = \sin a$

L'équation $\sin x = \sin a$ a pour solutions les nombres réels :
$x = a + 2k\pi$ et $x = \pi - a + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.



Exemples :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -0,5$. Vidéo 1

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 3x = 1$. Vidéo 2

VI. Etude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$$

Etudier la parité de f. Vidéo

Démontrer que f est périodique de période π. Vidéo

Etudier les variations de f. Vidéo

Représenter graphiquement la fonction f. Vidéo