

Chapitre 14

Intégration

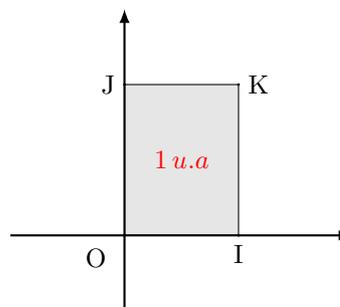
Les savoir-faire

- 140. Calculer une intégrale à l'aide d'aires simples.
- 141. Calculer une intégrale à l'aide de primitives.
- 142. Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.
- 143. Déterminer une aire à l'aide du calcul intégral.
- 144. Encadrer une intégrale.
- 145. Calculer et utiliser la valeur moyenne d'une fonction.

I. Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

1. Unité d'aire

Soit $(O; I; J)$ un repère orthogonal du plan et K le point de coordonnées $(1; 1)$.
L'aire du rectangle $OIKJ$ définit l'unité d'aire (noté $u.a.$).
Ainsi $\mathcal{A}_{OIKJ} = 1 u.a.$

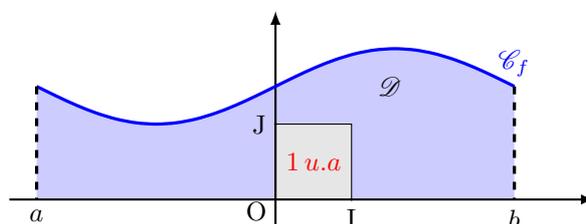


2. Définition

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$.
On appelle intégrale de a à b de f , l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ (en $u.a.$) de la partie \mathcal{D} du plan limitée par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

$$\text{Ainsi : } \int_a^b f(x) dx = \mathcal{A}(\mathcal{D}) \quad \text{en } u.a.$$

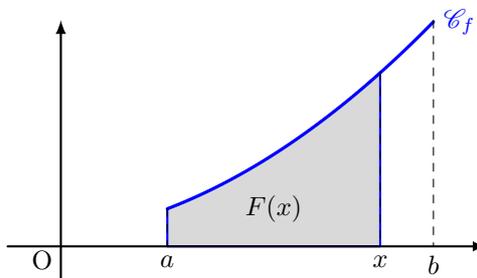


Exemple :

Calculer : $\int_{-1}^5 \frac{1}{2}x + 3 \, dx$ Vidéo

II. Intégrale d'une fonction continue

1. Lien entre intégrale et dérivée



Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a ; b]$. La fonction F définie sur I par :
 $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est dérivable sur I et a pour dérivée f .

Exemple :

Soit F la fonction définie sur $[0 ; 10]$ par $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} \, dt$. Etudier la fonction F puis tracer sa courbe représentative. Vidéo

2. Intégrales et primitives

Définition

Soit f fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Pour tous réels a et b de I , on définit l'intégrale de a à b de la fonction f par :

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Remarques :

- Une intégrale n'est pas forcément positive : elle ne correspond plus à l'aire d'un domaine.
- Lorsque f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$, le nombre $\int_a^b f(x) \, dx$ est positif et correspond à l'aire du domaine délimité par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
- Une intégrale ne dépend pas de la primitive choisie pour la calculer.

III. Propriétés et intégration par parties

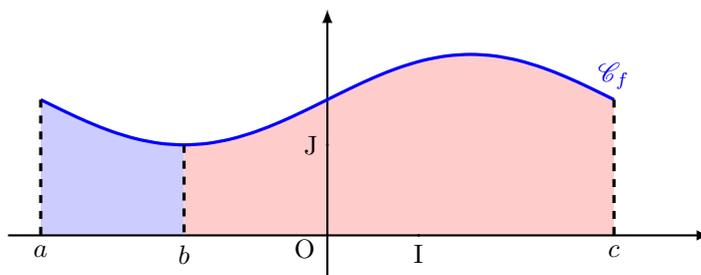
1. Relation de Chasles

Propriété

Additivité des aires (relation de Chasles) :

Pour tous a, b et c tels que $b \in [a; c]$:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



2. Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle et a, b et c trois réels de I .

— $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

— **Relation de Chasles :** $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

— **Linéarité :** $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

— Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

— Si f est négative sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

— Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

ATTENTION! La réciproque de chacun de ces trois points est fausse!

Exemples :

1. Calculer $\int_1^4 \frac{3}{x^2} dx$ Vidéo

2. Calculer $\int_2^5 (3x^2 + 4x - 5) dx$ Vidéo

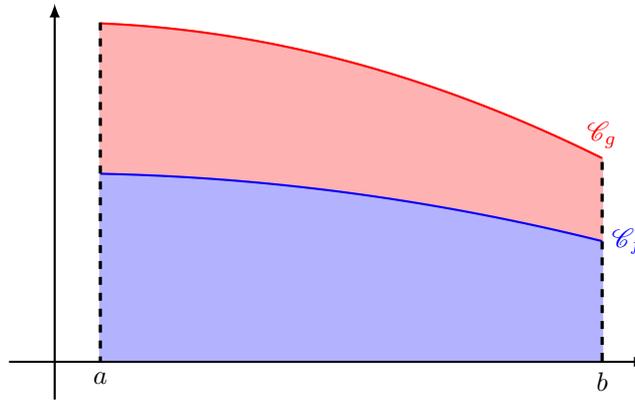
3. Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3} dx$ Vidéo

3. Conservation de l'ordre

Propriété

On considère deux fonctions f et g définies et continues et positives sur un intervalle $[a ; b]$.
Si pour tout nombre réel $x \in [a ; b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$



4. Intégration par parties

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I .
Soient a et b deux réels de I .

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$$

Exemple :

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) \, dx$ Vidéo

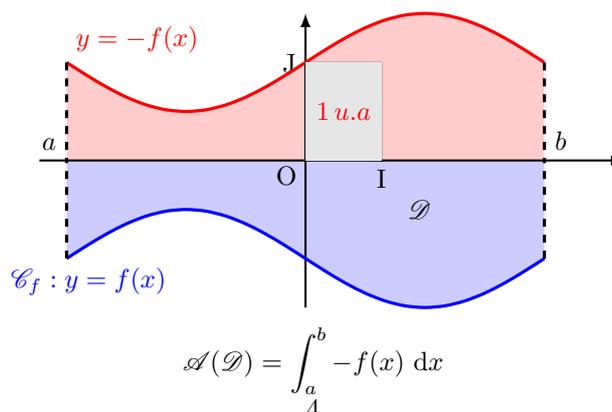
IV. Calcul d'aires

1. Avec une fonction négative

Propriété

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a ; b]$. L'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ (en u.a) du domaine \mathcal{D} du plan délimité par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^b -f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{en u.a}$$



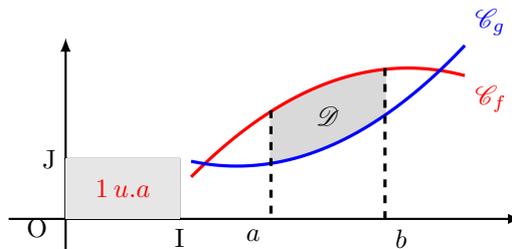
2. Aire entre deux courbes

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a ; b]$ telles que $f \geq g$ sur $[a ; b]$.

L'aire (en unités d'aire) du domaine compris entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

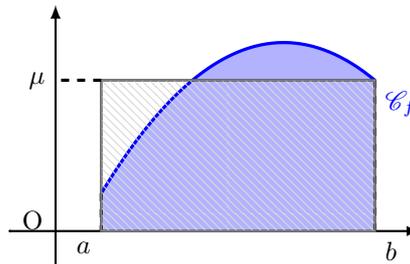


3. Valeur moyenne

Définition

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$. On appelle **valeur moyenne de f entre a et b** le nombre μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$



Remarque : Dans le cas où f est strictement positive sur $[a ; b]$, la valeur moyenne de f correspond à la hauteur du rectangle de largeur $(b - a)$ ayant la même aire que le domaine sous la courbe \mathcal{C}_f .

Exemples :

1. On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$. Déterminer l'aire délimitée par les courbes de f et g sur $[-1 ; 2]$. [Vidéo](#)

2. On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie. Au x -ième jour, le nombre de malades est égal à : $f(x) = 16x^2 - x^3$.

Déterminer le nombre moyen de malades sur la période 16 jours. Donner une interprétation graphique du résultat. [Vidéo](#)

