Raisonnement par récurrence

www.mathGM.fr

Lycée Louise Michel (Gisors)

Les savoir-faire

10. Savoir mener un raisonnement par récurrence.
11. Utiliser le raisonnement par récurrence pour étudier une suite.

Le problème de Nabolos

On considère la propriété suivante :

« $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 »

On peut vérifier que cette propriété est vraie pour quelques valeurs de n. Mais l'est-elle pour tous les entiers naturels n ?

Principe du raisonnement

Théorème

Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. Si :

Principe du raisonnement

Théorème

Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. Si :

- il existe un entier naturel n_0 tel que $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie (**Initialisation**) ;

Principe du raisonnement

Théorème

Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. Si :

- il existe un entier naturel n_0 tel que $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie (**Initialisation**) ;
- pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}_n$ vraie implique $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie (**Hérédité**) ;

Principe du raisonnement

Théorème

Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. Si :

- il existe un entier naturel n_0 tel que $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie (**Initialisation**) ;
- pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}_n$ vraie implique $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie (**Hérédité**) ;
  Alors $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Méthode

Propriété

Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. Pour montrer que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, on procède en deux étapes :

Méthode

Propriété

Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. Pour montrer que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, on procède en deux étapes :

- **Initialisation :** On montre que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour n_0 (le plus souvent, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$). On dit que la propriété est **initialisée** au rang n_0 (c'est-à-dire : $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie) ;

Méthode

Propriété

Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.
Pour montrer que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, on procède en deux étapes :

- **Initialisation :** On montre que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour n_0 (le plus souvent, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).
On dit que la propriété est **initialisée** au rang n_0 (c'est-à-dire : $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie) ;
- **Hérédité :** On suppose la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier naturel n fixé et quelconque, et on montre que, sous cette hypothèse, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On dit que la propriété est **héréditaire**.

ALORS

On conclut que la propriété est vraie pour tout entier naturel n plus grand que n_0.

Exemples

Démontrer une célèbre inégalité

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geqslant 1+na$ avec $a > 0$. Vidéo

Exemples

Démontrer une célèbre inégalité

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geqslant 1+na$ avec $a>0$. Vidéo

Démontrer une expression générale d'une suite

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = (n+1)^2$. Vidéo

Exemples

Démontrer une célèbre inégalité

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geqslant 1+na$ avec $a>0$. Vidéo

Démontrer une expression générale d'une suite

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = (n+1)^2$. Vidéo

Démontrer la monotonie d'une suite

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante. Vidéo