Chapitre 3

Limites de suites

Les savoir-faire

30. Déterminer une limite en utilisant la définition.
31. Étudier la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient.
32. Déterminer une limite par minoration, majoration, encadrement.
33. Connaître et utiliser le théorème de convergence des suites monotones.
34. Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique.
35. Déterminer un seuil à l'aide d'un algorithme.

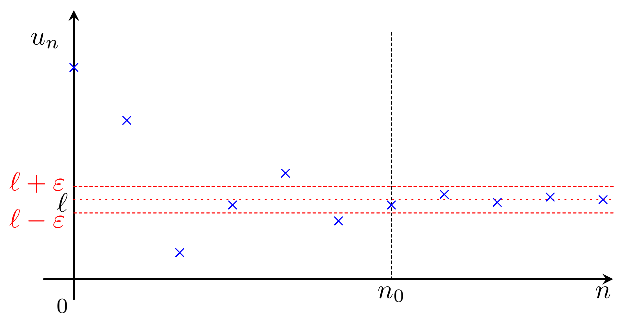
I. Convergence d'une suite

Introduction :
Étudier la convergence d'une suite (u_n), c'est examiner le comportement des termes u_n quand $\boldsymbol{n}$ tend vers $+\infty$.

1. Limite finie

Définition

On dit que la suite (u_n) tend vers ℓ (ou converge vers ℓ), si tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que : si $n \geqslant n_0$ alors $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$



2. Unicité de la limite

Propriétés

Si une suite (u_n) a une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$, alors cette limite est unique. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

II. Suite divergente

1. Suites divergentes

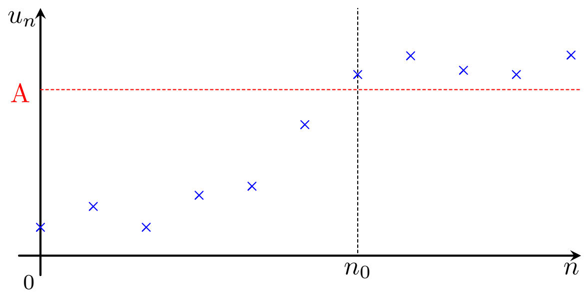
Définition

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

2. Limite infinie

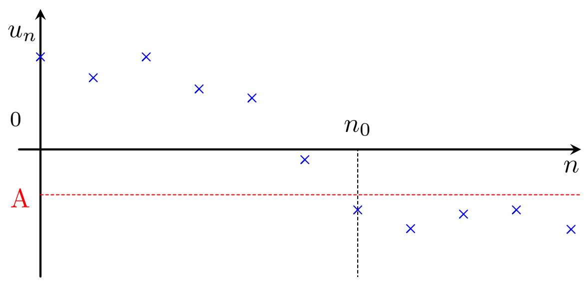
Définition

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe un entier n_0 tel que : si $n \geqslant n_0$ alors $u_n > A$.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



Définition

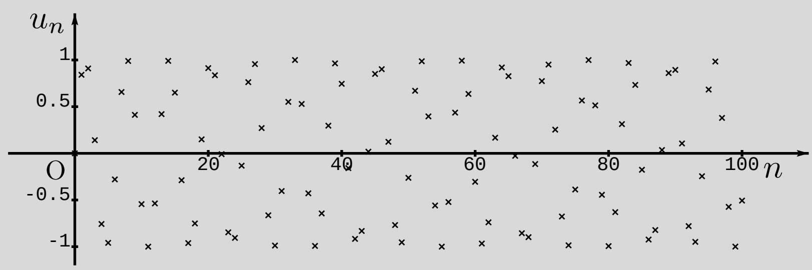
Une suite (u_n) tend vers $-\infty$, si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\ ;\ A[$ avec $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe un entier n_0 tel que : si $n \geqslant n_0$ alors $u_n < A$.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.



3. Suites sans limite

Définition

Certaines suites n'ont pas de limite.
Par exemple, la suite u définie par $u_n = \sin n$ pour $n \geqslant 0$ et représentée ci-dessous n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.



Autre exemple :
La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite.

III. Calcul d'une limite de suite

1. Opérations sur les limites

Somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \downarrow$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \downarrow$	0	$b \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	?	?
$a \in \mathbb{R}^*$	0	ab	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	?	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	?	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \downarrow$	0	$a \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
0	?	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$b \in \mathbb{R}^*$	0	$\dfrac{a}{b}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	0	?	?
$-\infty$	0	0	?	?

Formes indéterminées

Il y a quatre formes indéterminées pour lesquelles on ne peut conclure directement : $\infty - \infty$, $\infty \times 0$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemple :

1. Calculer les limite suivantes :
$\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+n)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right)(n^2+3)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^2+3}$ Vidéo

2.Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-3\sqrt{n})$. Vidéo

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$. . Vidéo

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+n}{n+3}$. Vidéo

5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$. . Vidéo

2. Théorèmes de comparaison

Propriété

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$:
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$;
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$;

Exemple :
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+(-1)^n)$ Vidéo

Théorème des gendarmes

Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si (u_n) et (w_n) converge vers une limite finie ℓ, alors la suite (v_n) converge aussi vers ℓ.

Exemple :
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right)$ Vidéo

3. Comportement d'une suite (q^n)

Théorème

Soit q un nombre réel,
- Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $-1<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Exemple :
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-2)^n}{3}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n-3^n)$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+....+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ Vidéo

4. Limites de suites monotones

Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$:

- (u_n) est majorée par M lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{M}$.
- (u_n) est minorée réel m lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$.
- (u_n) est bornée lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Théorème

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.
- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 3. Vidéo

2.Démontrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite. Vidéo