Chapitre 4

Orthogonalité et distances dans l'espace

Les savoir-faire

40. Calculer et utiliser un produit scalaire.

41. Etudier l'orthogonalité de droites et de plans.

42. Déterminer et utiliser un vecteur normal à un plan.

43. Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou un plan.

I. Produit scalaire à l'espace

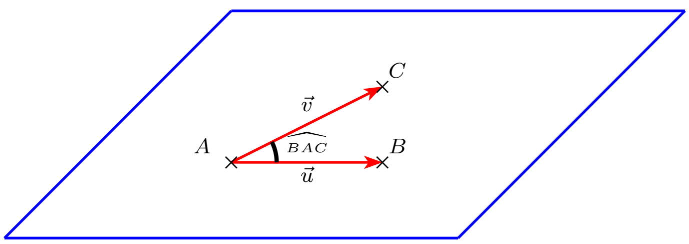
1. Produit scalaire dans l'espace

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Les points A, B et C étant coplanaires, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan contenant les points A, B et C.

Expressions

- **Avec les normes :** pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$
- **Avec un angle :**
Soient A, B et C trois points de l'espace, B et C étant distincts du point A.
Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

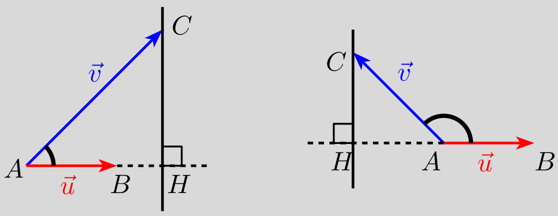


Expressions

Avec la projection orthogonale :

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de l'espace et si H est le projeté du point C sur la droite (AB), alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

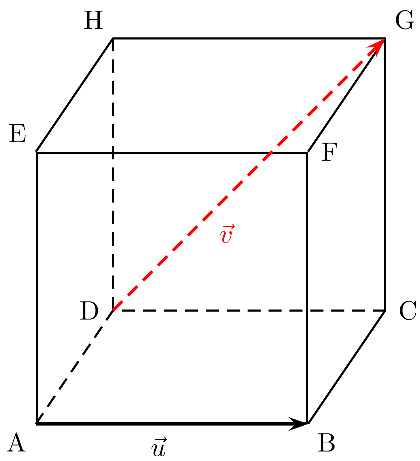
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, alors :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH \,;$$
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire, alors :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH.$$



Exemple :

On considère un cube $ABCDEFCH$ d'arête a.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.



Vidéo

2. Orthogonalité de vecteurs

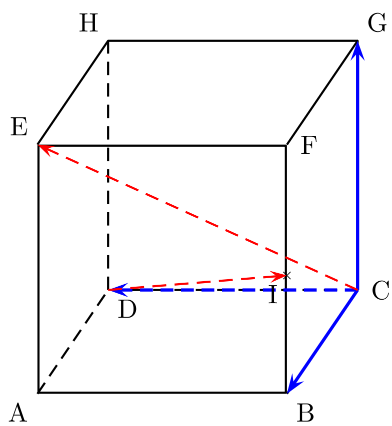
Définition et propriétés

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$ ou $(\vec{u}\,,\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
- Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Exemple :

On considère le repère $(C\,;\,\overrightarrow{CB}\,;\,\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CG})$, I est le milieu de $[BF]$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont-ils orthogonaux ? Vidéo



II. Orthogonalité dans l'espace

1. Droites orthogonales

Définition

Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Remarques :
- Deux droites orthogonales ne sont pas toujours coplanaires.
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes en un angle droit.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque est fausse.

Propriété

- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

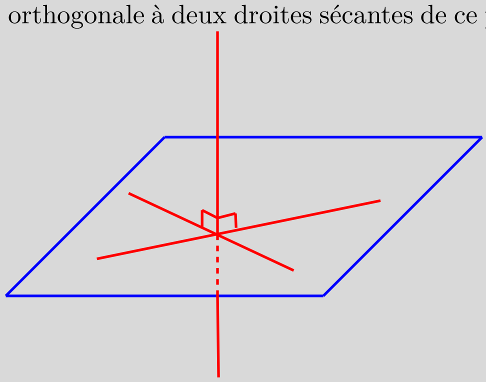
2. Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition

Soient un plan $\mathcal{P}$ de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.
La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires si $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

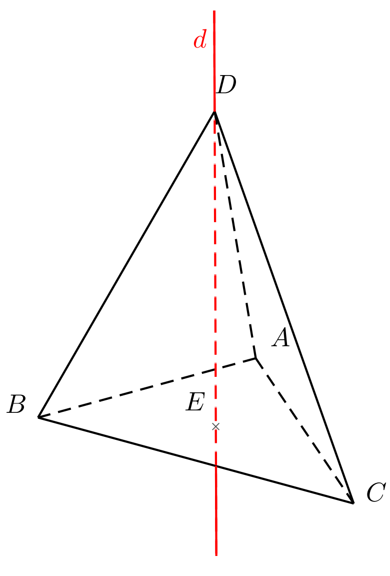
Propriétés

- Une droite est orthogonale à un plan, si et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.



Exemple :
Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur ℓ. Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales. Vidéo

Exemple : ABC est un triangle équilatéral.
E est le point d'intersection de ses médianes.
La droite d passant par E est orthogonale au plan (ABC).
D est un point de la droite d.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales. Vidéo

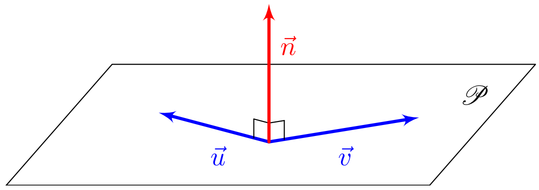


III. Vecteur normal, projeté orthogonal

1. Vecteur normal

Définition

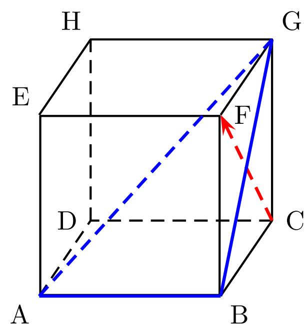
Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathscr{P}$ lorsqu'il est :
non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.



Remarques :

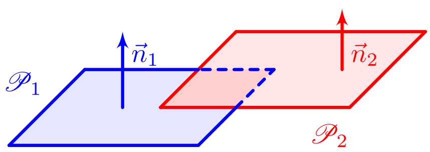
- Un plan admet une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires entre eux.
- Un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathscr{P}$.

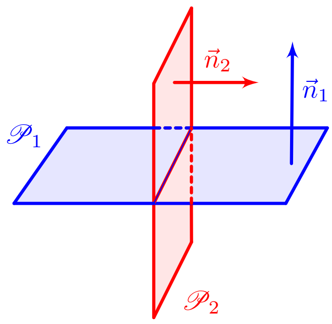
Exemple :
$ABCDEFGH$ est un cube.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG). Vidéo



Propriétés

— Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
— Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

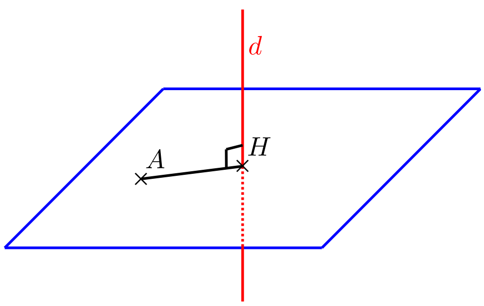




2. Projeté orthogonal d'un point

Définition : projeté orthogonal sur une droite

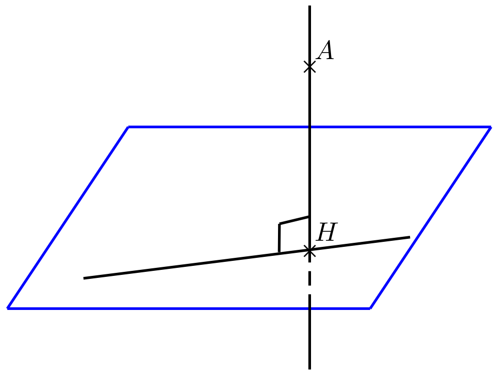
Soient A un point et d une droite de l'espace. Il existe un unique plan passant par A et orthogonale à d. La droite d est alors sécante avec ce plan et leur point d'intersection est appelé projeté orthogonal de A sur d.



3. Projeté orthogonal d'un point

Définition : projeté orthogonal sur un plan

Soient A un point et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Il existe une unique droite passant par A et orthogonale à $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ est alors sécant avec cette droite et leur point d'intersection est appelé projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.



IV. Calculs de distances

1. Définitions

Définition

Une base orthonormée de l'espace est une base de l'espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.
Autrement dit, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée de l'espace si on a :

- $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0$
- $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1$

Définition

Un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère tel que la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ soit orthonormée.

2. Propriétés

Propriétés

Dans une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

On a alors :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Propriétés

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
On a alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

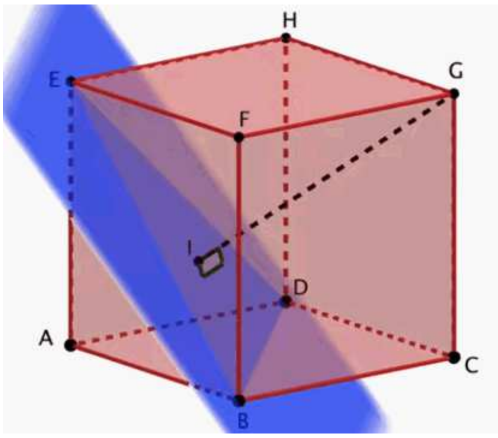
Propriétés : distance d'un point à une droite

Le projeté orthogonal H d'un point A sur une droite d est le point de d le plus proche du point A. La longueur AH est la distance du point A à la droite d.

Propriétés : distance d'un point à un plan

Le projeté orthogonal H d'un point A sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche du point A. La longueur AH est la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.

Exemple :
On considère un cube $ABCDEFGH$. Calculer la distance du point G au plan BDE. Vidéo



Exemple :
Dans un repère orthonormé, on donne $A(1\ ;\ 2\ ;\ -2)$, $B(-1\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ 0\ ;\ -2)$.
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC). Vidéo