Chapitre 5

Limites de fonctions

Les savoir-faire

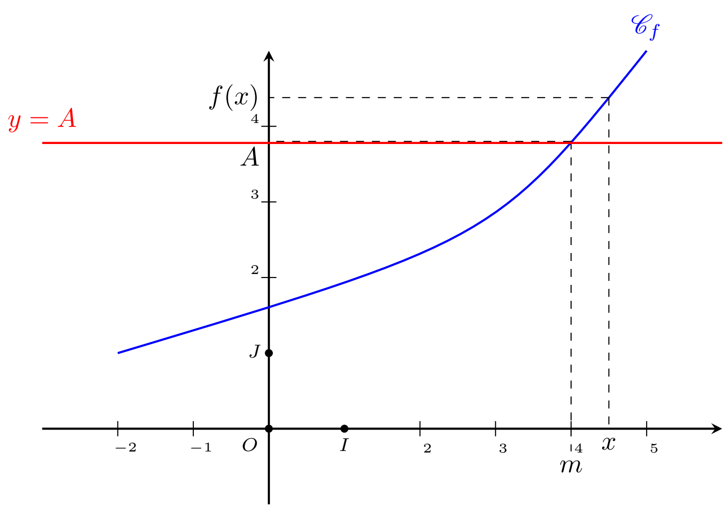
50. Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient (sans forme indéterminée).
51. Déterminer la limite d'une composée.
52. Déterminer la limite lors d'une forme indéterminée.
53. Déterminer une limite par minoration, majoration, encadrement.
54. Interpréter graphiquement les limites.

I. Limite d'une fonction en l'infini

1. Limite infinie

Définition

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A\ ;\ +\infty[$, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez grand.
Autrement dit, pour tout nombre A, il existe un nombre réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) > A$.

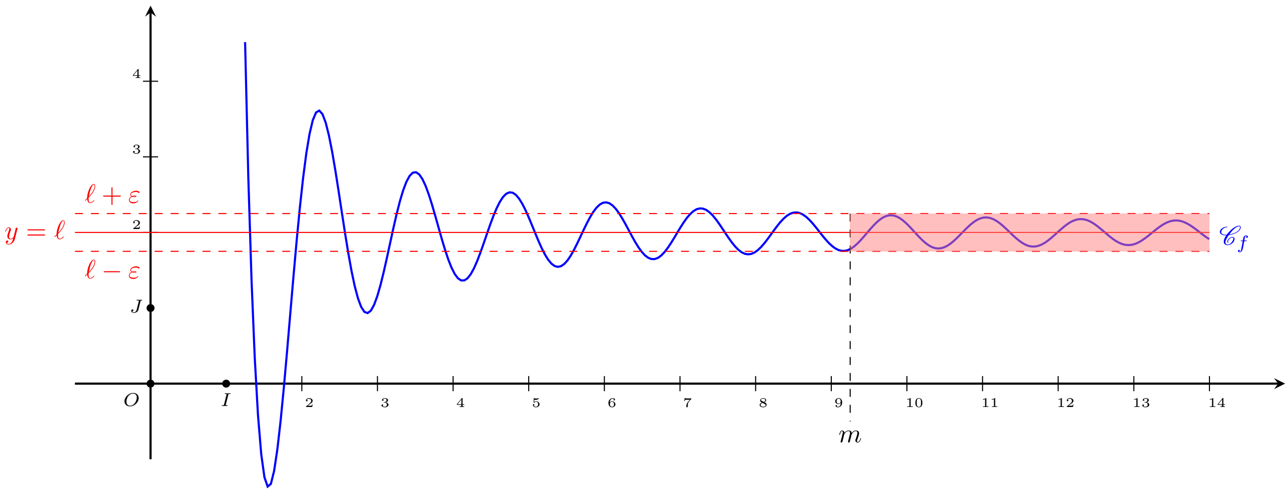


Remarques :
— On définit de façon analogue : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
— Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en l'infini.
— Une fonction qui tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini n'est pas forcément croissante.

2. Limite finie

Définition

On dit que $f(x)$ tend vers un nombre réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ pour x assez grand.
Autrement dit, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel m tel que si $x > m$ alors $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$.



3. Asymptote horizontale

Définition

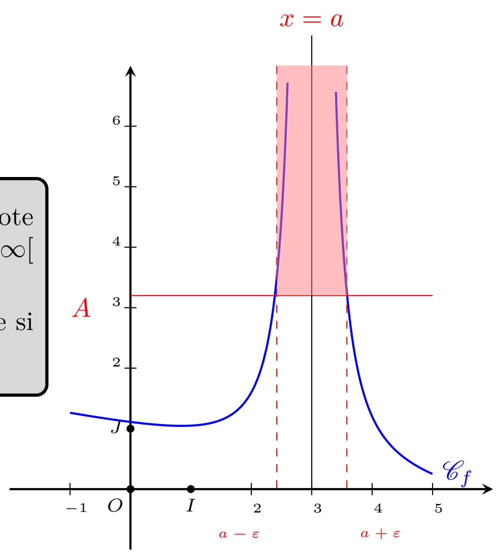
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, on dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

II. Limite infinie en un réel

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a une borne de l'intervalle I.

Définition

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a dans I.
Autrement dit, pour tout nombre A, il existe un réel ε tel que si $x \in I$ et $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$ alors $f(x) > A$.



Asymptote

On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$.

Remarques :

— Lorsque x tend vers x_0, cela peut parfois se faire en augmentant ou en diminuant. On parle alors de limite de f à gauche (resp. droite) en x_0 qu'on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$).

— Une fonction admet une limite en x_0 si, et seulement si, f admet des limites à droite et à gauche en x_0 qui sont égales (ce qui n'est pas toujours le cas).
— Une fonction peut très bien ne pas avoir de limite du tout en un point.

III. Opérations sur les limites

Dans ce paragraphe, a désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

1. Somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \to$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ $\downarrow$	$\ell\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'\in\mathbb{R}$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

2. Produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \to$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ $\downarrow$	0	$\ell\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	?	?
$\ell'\in\mathbb{R}^*$	0	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	?	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	?	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

3. Quotient

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \to$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ $\downarrow$	0	$\ell\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
0	?	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\ell'\in\mathbb{R}^*$	0	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	0	?	?
$-\infty$	0	0	?	?

Exemples :
Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\frac{1}{x}}{x+3}$. Vidéo

4. Limites et composition

Chacune des lettres a, b et c désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Composition

Soient u et f deux fonctions , alors si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(u(x)) = \ell$.

Exemple :

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x-1}{2x+3}}$. Vidéo

IV. Les formes indéterminées

Quatre formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $\dfrac{0}{0}$.

- **Cas des polynômes :**

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1)$. Vidéo

- **Cas des fonctions rationnelles :**

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 2}{4x - 1}$. Vidéo

- **Avec une expression conjuguée :**

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$. Vidéo

- **Avec un taux de variation :**

Calculer $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$. Vidéo

V. Théorème de comparaison et croissance comparée

1. Comparaison

Soient f, g et h des fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel tel que $a \in I$ ou a est une borne de I.

Théorème de comparaison

Si pour tout $x \in I$ on a : $g(x) \leqslant f(x)$:
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$.

Théorème des gendarmes

Si pour tout $x \in I$ on a : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

2. Croissances comparées et exemples

Croissances comparées

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

Remarques : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$.

Exemples :

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x)$. Vidéo

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{x \cos x}{x^2 + 1})$. Vidéo

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + x}{\mathrm{e}^x - x^2}$ Vidéo