

Chapitre 6

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Les savoir-faire

- 60. Déterminer et utiliser la représentation paramétrique d'une droite.
- 61. Déterminer et utiliser une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal.
- 62. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan ou sur une droite.

I. Représentations paramétriques

Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur non nul $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à la droite d passant par le point A et de vecteur directeur \vec{u} si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Ce système d'équations s'appelle une représentation paramétrique de la droite d .

Remarque : Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

Exemple :

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Soit les points $A(2 ; 3 ; -1)$ et $B(1 ; -3 ; 2)$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Vidéo

II. Équation cartésienne d'un plan

1. Caractérisation des points d'un plan

Propriété

Soit \mathcal{P} un plan de vecteur normal \vec{n} et A un point de \mathcal{P} . Un point M de l'espace appartient au plan \mathcal{P} si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

2. Equation cartésienne d'un plan

Définition - Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace, tout plan \mathcal{P} passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal non nul $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ admet une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan \mathcal{P} .

Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ est un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple :

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(-1; 2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. [Vidéo](#)

III. Positions relatives

1. Entre une droite et un plan

Propriété

Soit d une droite de vecteur directeur \vec{u} et \mathcal{P} un plan de vecteur normal \vec{n} .
 d et \mathcal{P} sont parallèles si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Exemple :

Dans un repère orthonormé, le plan (P) a pour équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.

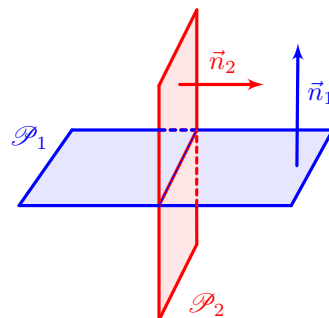
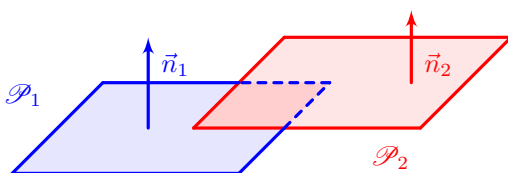
Soit $A(1; 2; -3)$ et $B(-1; 2; 0)$. Déterminer l'intersection de la droite (AB) avec le plan (P) . [Vidéo](#)

2. Entre deux plans

Propriété

Soit \mathcal{P}_1 un plan de vecteur normal \vec{n}_1 et \mathcal{P}_2 un plan de vecteur normal \vec{n}_2 :

- Les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont colinéaires.
- Les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont orthogonaux.



Exemples :

On donne les équations cartésiennes de deux plans.

$$(P) : -x + 2y + z - 5 = 0.$$

$$(P') : 2x - y + 3z - 1 = 0.$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection (d) des plans (P) et (P') . [Vidéo](#)

Exemple :

On donne les équations cartésiennes de deux plans.

$$(P) : 2x + 4y + 4z - 3 = 0.$$

$$(P') : 2x - 5y + 4z - 1 = 0.$$

Démontrer que les plans (P) et (P') sont orthogonaux. [Vidéo](#)