MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé

Exercice 1
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Dresser le tableau de variations (sur son ensemble de définition) de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

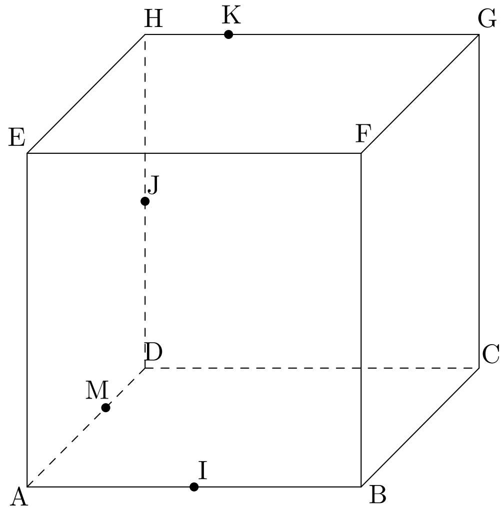
2. Donner la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

3. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentant la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x$$
Donner la fonction dérivée de h sous la forme d'un produit.

Exercice 2

On considère un cube ABCDEFGH.
I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [DH].
K et M sont les points tels que :
$$\overrightarrow{\mathrm{HK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$



L'objectif de cet exercice est de montrer que le point M appartient au plan (IJK).
On considère le repère de l'espace $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. a. Donner les coordonnées des points I, J, K et M.

b. En déduire celles des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$.

2. Déterminer les réels α et β tels que $\overrightarrow{\mathrm{IM}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{IJ}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{IK}}$. Conclure.

Exercice 3
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n.$$

1. En utilisant la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						
$u_n - n$						

2. Quelle conjecture peut-on faire à partir des résultats de ce tableau ?

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n$.