MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé

Exercice 1 (7 points)

Soit a la suite définie par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{3}{4}n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n > n$.

2. En déduire la limite de la suite a.

3. Soit b la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $b_n = a_n - n$.

a. Vérifier que la suite b est géométrique. Déterminer sa raison, ainsi que son premier terme.

b. En déduire une expression de a_n en fonction de n, puis retrouver le résultat de la question **2.**.

Exercice 2 (3 points)

Dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(2\,;\,1\,;\,5)$, $B(4\,;\,2\,;\,4)$, $C(3\,;\,3\,;\,5)$ et $D(0\,;\,3\,;\,7)$.

a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

b. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 3 (3 points)

Recopier sur votre copie la bonne réponse sans justification.

1. Soit une suite (u_n) qui converge vers 2.
Pour le(s)quel(s) des intervalles suivants, peut-on affirmer qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes lui appartiennent ?

a. $]0\ ;\ +\infty[$ **b.** $]-\infty\ ;\ 2[$ **c.** $]-1\ ;1[$ **d.** $]1{,}999\,99\ ;\ 2{,}000\,01[$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{0{,}2^n}$ est :

a. 0 **b.** $+\infty$ **c.** on ne peut pas savoir

3. Un encadrement de $\dfrac{6-2\cos\left(n^3\right)}{n^3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ permettant de déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$ est :

a. $\dfrac{4}{n^3} \leqslant \dfrac{6-2\cos\left(n^3\right)}{n^3} \leqslant \dfrac{8}{n^3}$

c. $\dfrac{6-2n^3}{n^3} \leqslant \dfrac{6-2\cos\left(n^3\right)}{n^3} \leqslant \dfrac{6+2n^3}{n^3}$

b. $\dfrac{8}{n^3} \leqslant \dfrac{6-2\cos\left(n^3\right)}{n^3} \leqslant \dfrac{4}{n^3}$

d. $\dfrac{6+2n^3}{n^3} \leqslant \dfrac{6-2\cos\left(n^3\right)}{n^3} \leqslant \dfrac{6-2n^3}{n^3}$

Exercice 4 (7 points)

Un laboratoire teste l'efficacité d'un nouveau désodorisant d'intérieur bio, à diffusion lente, fabriqué avec 99,9 % de produits naturels. La fonction g modélise le taux d'efficacité du désodorisant (en pourcentage) en fonction du temps t exprimé en heures.

g est définie sur $[0\,;\,24]$ par :

$$g(t) = 50t\mathrm{e}^{-0,5t+1}.$$

1. La courbe C_g , donnée ci-dessous est la représentation graphique de g dans un repère orthogonal. À l'aide de cette courbe, sur laquelle les traits de construction resteront apparents :

a. Déterminer au bout de combien de temps le taux d'efficacité est maximal. Donner alors sa valeur.

b. Le désodorisant est considéré comme efficace lorsque le taux d'efficacité est supérieur ou égal à 40 %. Il est commercialisable lorsqu'il est considéré comme efficace pendant 5 heures et demie ou plus.

Vérifier si ces deux conditions sont réalisées et donc si le désodorisant est commercialisable.

2. a. Montrer que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,24]$, $g'(t) = (50 - 25t)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.

b. Étudier le signe de $g'(t)$, puis construire le tableau de variation de g sur $[0\,;\,24]$.

3. a. Calculer $g(0,5)$ puis $g(6)$. Les résultats seront arrondis à 10^{-1} près.

b. Justifier alors, en utilisant le sens de variation de la fonction f, que les deux conditions données à la question **1. b.** sont bien réalisées.

Courbe C_g