MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé (corrigé)

Exercice 1

1. Soit P_n la propriété définie pour tout entier naturel n par : $a_n > n$.

- Initialisation : $a_0 = 1$ et $1 > 0$. On a donc bien $a_0 > 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.

- Hérédité :
Supposons que pour **un** entier naturel n, on ait :

$$a_n > n \qquad \text{Hypothèse de récurrence.}$$

Montrons qu'alors on a : $a_{n+1} > n+1$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}n + 1 \\ &> \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}n + 1 && \text{par hypothèse de récurrence } a_n > n \\ &> n+1 \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

- Conclusion : Pour tout entier naturel n, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

$$\textbf{Pour tout } \text{entier } n, \text{on a } a_n > n$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} n = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = +\infty$.

3. a. Nature de la suite b.

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - (n+1) \\ &= \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}n + 1 - n - 1 \\ &= \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{4}n \\ &= \frac{1}{4}(a_n - n) \\ &= \frac{1}{4}b_n \end{aligned}$$

On en déduit que b est une suite géométrique de premier terme $b_0 = a_0 - 0 = 1$ et de raison $\frac{1}{4}$.

b. Ainsi pour tout entier naturel n, $b_n = b_0 \times q^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Comme $a_n = b_n + n$, on obtient, $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + n$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} n = +\infty$.

Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + n = +\infty$, et par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = +\infty$.