Lycée Louise Michel 05/02/21

Terminale

MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé (corrigé) (2 heures)

Exercice 1

1. a. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles), on en déduit que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. On cherche a et b de façon que $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$.

On obtient : $\begin{cases} -a + 2b - 9 = 0 \\ -a + 3 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 6 \\ a = 3 \end{cases}$.

On en déduit que : $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est : $3x + 6y + 3z + d = 0$.
Comme $A \in \mathscr{P}$, alors : $3 \times 1 + 6 \times 0 + 3 \times 2 + d = 0$, soit $d = -9$.
Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est : $3x + 6y + 3z - 9 = 0$.

2. Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est donnée par : $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{d}$ car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
On en déduit que les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont soit sécantes (et donc coplanaires) soit non coplanaires.

On cherche un éventuel point d'intersection entre $\mathscr{D}$ et Δ en résolvant le système $\begin{cases} -1 - 2t = 2 + u \\ 2 + 3t = -6 + 2u \\ -3 - 4t = 2 + 3u \end{cases}$. On résout le système formé par les deux premières équations :

$\begin{cases} -1 - 2t = 2 + u \\ 2 + 3t = -6 + 2u \end{cases} \iff \begin{cases} u = -3 - 2t \\ 2 + 3t = -6 + 2(-3 - 2t) \end{cases} \iff \begin{cases} u = -3 - 2t \\ t = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ u = 1 \end{cases}$.

Ces deux valeurs vérifient la dernière équation. On en déduit que les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes en un point F dont les coordonnées sont $(3\ ;\ -4\ ;\ 5)$.

3. a. $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ 3 \\ -\dfrac{9}{2} \end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ qui sont les coordonnées du vecteur $\vec{d}$. On vient donc de montrer que $\vec{d} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b. Le point E n'appartient pas à $\mathscr{P}$ car : $3 \times (-1) + 6 \times 2 + 3 \times (-3) - 9 \neq 0$.

c. L'égalité $\vec{d} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ permet d'affirmer que les vecteurs $\vec{d}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Par conséquent la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$. De plus E n'est pas dans le plan $\mathscr{P}$ et donc la droite dirigée par $\vec{d}$ passant par E est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Exercice 2

- Partie A -

1. Pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1} = \frac{\cancel{x^4}\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3a}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)} = \frac{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3a}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^4}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3a}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4} = 0 \\ \text{Par somme } \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3a}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right) = 1 \\ \text{Par somme } \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^4}\right) = 1 \end{array}\right\} \text{Par quotient, } \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3a}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^4}} = 1$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_a(x) = 1$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale en ∞.

2. Conjectures :

- Si $0 < a < 1$, il n'y a pas de point d'intersection entre D et C_a.
- Si $a = 1$, il y a un point d'intersection entre D et C_a.
- Si $a > 1$, il y a deux points d'intersection entre D et C_a.

- Partie B -

1. L'abscisse du point d'intersection de C_a et D vérifie : $g_a(x) = 1$.

$$\begin{aligned} g_a(x) = 1 &\iff \frac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1} = 1 \\ &\iff x^4+2x^3-3ax^2+2 = x^4+1 \\ &\iff 2x^3-3ax^2+1 = 0 \\ &\iff h_a(x) = 0 \end{aligned}$$

2.
- $h_a(0) = 2 \times 0^3 - 3a \times 0^2 + 1 = 1$.
- $h_a(a) = 2a^3 - 3a^3 + 1 = -a^3 + 1$.
- $2x^3 - 3ax^2 + 1 = x^3\left(2 - \dfrac{3a}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3a}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)=0 \\[2ex] \text{Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{3a}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)=2 \\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty \end{array}\right\} \text{ Par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(2-\dfrac{3a}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)=+\infty$$

- La fonction h_a est une fonction polynôme du troisième degré, elle est donc dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$h'_a(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$.

x	0	α_1	a	α_2	$+\infty$
$6x$	0	$+$		$+$	
$x-a$		$-$	0	$+$	
$h'_a(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h_a(x)$	1 ↘	0 ↘	$-a^3+1$	↗ 0	↗ $+\infty$

3. a. $-2,5^2+1=-14,625<0$.
- h_a est continue sur $[0\ ;\ 2,5]$
- h_a est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 2,5]$;
- $0\in[-14,625\ ;\ 1]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h_a(x)=0$ admet une unique solution α_1 sur $[0\ ;\ 2,5]$.

b. En utilisant la calculatrice, $\alpha_1\simeq 0,39$ et $\alpha_2\simeq 3,71$. Ces nombres sont des valeurs approchées des abscisses des points d'intersection de D avec $C_{2,5}$.

4. Tableau de signes de $-a^3+1$:

x	0		1		$+\infty$
$-a^3+1$		$+$	0	$-$	

Sur $[0\ ;\ 1[$, $-a^3+1$ est positif. Le minimum de h_a est donc positif. Par conséquent, l'équation $h_a(x)=0$ n'a pas de solution. Ainsi, il n'y a pas de point d'intersection entre D et C_a.
Sur $]1\ ;\ +\infty[$, $-a^3+1$ est négatif. Le minimum de h_a est donc négatif. Par conséquent, l'équation $h_a(x)=0$ a deux solutions. Ainsi, il y a deux points d'intersection entre D et C_a.
Si $a=1$, $-a^3+1=0$. Le minimum de h_a est nul. Par conséquent, l'équation $h_a(x)=0$ a une solution. Ainsi, il y a un point d'intersection entre D et C_a.

Exercice 3

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2\,(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$

Partie A

1. • Limite de f en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty\end{array}\right\} \text{ Par composition, } \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} -2(x+2) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty\end{array}\right\} \text{ Par produit, } \lim\limits_{x \to -\infty} -2(x+2)\mathrm{e}^{-x} = +\infty$$

• Limite de f en $+\infty$:
Par produit, on a une forme indéterminée. Il s'agit de transformer l'écriture de $f(x)$.

$f(x) = -2(x+2)\mathrm{e}^{-x} = -2x\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x\mathrm{e}^{-x} = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 4\mathrm{e}^{-x} = 0\end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim\limits_{x \to +\infty} -2x\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-x} = 0$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
$f'(x) = -2(1)\mathrm{e}^{-x} - 2(x+2)(-1)\mathrm{e}^{-x} = (-2+2x+4)\mathrm{e}^{-x} = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $x < -1$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$;
- Si $x > -1$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$;
- $f'(-1) = 0$ et f admet un minimum en -1 égal à $f(-1) = -2\mathrm{e}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2(x+1)$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2\mathrm{e}$	$\nearrow$	0

Partie B

On sait que sur un intervalle : f convexe $\iff$ f' croissante $\iff$ f'' positive
Il faut donc déterminer quelle fonction correspond à chacune des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
- La seule courbe qui corresponde aux variations de la fonction f est $\mathcal{C}_3$.
- La courbe $\mathcal{C}_1$ correspond à une fonction négative sur $]-\infty\,;-1[$ et positive sur $]-1\,;+\infty[$; c'est donc la courbe représentative de la fonction f' car la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et croissante sur $]-1\,;+\infty[$.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ est donc la représentation graphique de la fonction f''.

Pour déterminer la convexité de la fonction f, il suffit de regarder le signe de la fonction f'' : $f'' > 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.