NOM : PRENOM : Classe :

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Session 2022

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Ce sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4
et est à rendre avec la copie

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

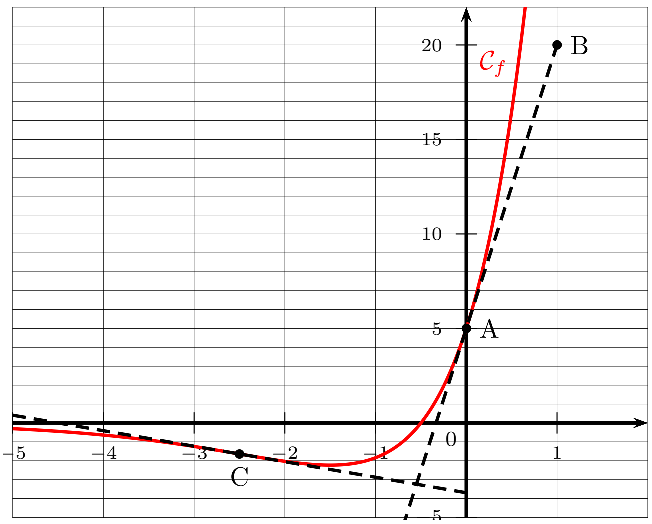
Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On notera f' la fonction dérivée de f.

On donne les points A de coordonnées $(0\,;\,5)$ et B de coordonnées $(1\,;\,20)$. Le point C est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse $-2,5$.

La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

Les questions **1** à **3** se rapportent à cette même fonction f.



1. On peut affirmer que :

a. $f'(-0,5) = 0$

b. si $x \in]-\infty\,;\,-0,5[$, alors $f'(x) < 0$

c. $f'(0) = 15$

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5\,;\,0)$.
On peut affirmer que :

a. $a = 10$ et $b = 5$

b. $a = 2,5$ et $b = -0,5$

c. $a = -1,5$ et $b = 5$

d. $a = 0$ et $b = 5$

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = (10x + 25)\mathrm{e}^x.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

b. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$

c. Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$

d. $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (U_n) converge

b. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$

c. la suite (U_n) diverge

d. la suite (U_n) est majorée

Exercice 2 (8 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1.

2. a. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

b. Résoudre dans $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $f(x) = x$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

4. a. Compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while ...............................
        u = ..............................
        n = n + 1
    return n
```

b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

5. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n+1}$.

c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1+0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (8 points)

On considère le cube ABCDEFGH donné en annexe.
On donne trois points I, J et K vérifiant :

$$\overrightarrow{\mathrm{EI}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{EH}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{EJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{EF}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{BK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BF}}$$

Les points I, J et K sont représentés sur la **figure donnée en annexe, à compléter au fur et à mesure des questions en faisant apparaître les traits de construction**.
On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (IJK).

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

5. En déduire les coordonnées du point L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK).

6. Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF).

7. Soit $\mathrm{M}\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.

8. Construire la section de cube par le plan (IJK). Aucune justification n'est demandée.

ANNEXE À COMPLÉTER