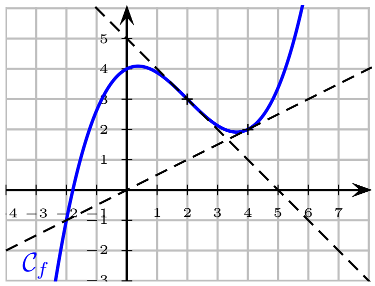
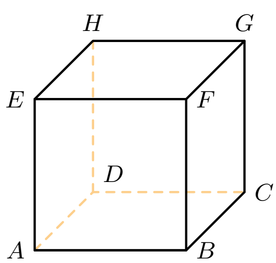
Lycée Louise Michel 2021/2022
Terminale

MATHEMATIQUES
Préparation au devoir surveillé

Exercice 1

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée, seule la réponse est attendue.

Enoncé	**Réponse**
1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$ par : $$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$ On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 ?	
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$h(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x$$ Donner la fonction dérivée de h sous la forme d'un produit.	
3. Pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}}$ est égal à :	Entourer la bonne réponse : **a.** -1 **b.** e^{-2x} **c.** $(\mathrm{e}^x)^2$ **d.** e^0
4. Donner l'ensemble des solutions de l'équation : $$x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x = 0$$	
5. Dresser le tableau de variations (sur son ensemble de définition) de la fonction f définie par : $$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$	
6.Donner la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{3}$	
7. Donner la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$	

Enoncé	**Réponse**
8. Soit : $P(x) = 2x^2 - 2x - 12$ Donner les solutions de l'équation $P(x) = 0$.	
9. Soit $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{1}{x}$. Donner $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient.	
10. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentant la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.	
11. Soit $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Donner sous forme factorisée $f'(x)$.	
12. Les droites sont les tangentes aux points d'abscisses 2 et 4.  $f'(4) \times f'(2)$ est égal à :	
13. Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$. $u_2 = ...$	
14. Compléter : Pour tout entier naturel n : $3^{n+1} - 2 \times 3^n = 3^{....}$	
15. Soit u la suite définie par : $u_n = -2n + 4$. $u_{n+1} - u_n = ...$	
16. Dresser le tableau de signe de la fonction f définie par : $f(x) = 4 - x^2$	
17. u est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $u_1 = 3$. Exprimer u_n en fonction de n.	
18. On considère la suite u définie par $u_0 = 200$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 22$. Quelle est la valeur de u_1 ?	
19. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$. 	

Exercice 2

- Partie A -

On considère l'algorithme ci-contre.
Un utilisateur exécute le programme suivant pour $N = 3$.
Quelles sont les valeurs dans les variables U et S à la fin de l'exécution de cet algorithme. On pourra compléter le tableau ci-dessous.

$U \longleftarrow 0$
$S \longleftarrow 0$
Pour k allant de 0 à $N-1$
    $U \longleftarrow 3U - 2k + 3$
    $S \longleftarrow S + U$
Fin Pour

Valeur de k					
Valeur de U	0				
Valeur de S	0				

- Partie B -

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver que : $\forall n \in N, \quad u_n \geqslant n$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (on pourra utiliser le résultat précédent).
Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Soit (b_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$b_n = u_n - n + 1$$

a. Calculer b_0, b_1 et b_2. Que peut-on conjecturer ?

b. Démontrer cette conjecture.

c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n + n - 1$.

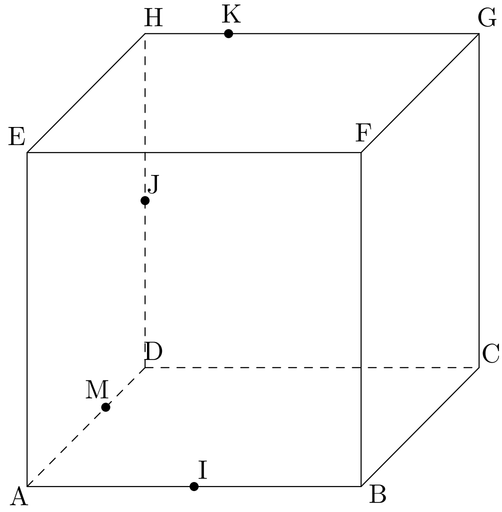
4. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Le professeur a demandé à Nabolos d'établir une formule permettant le calcul de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Après quelques recherches il lui semble que $S_n = \dfrac{3^{n+1} + n^2 - n - 3}{2}$ mais il n'arrive pas à démontrer sa formule.

a. En utilisant la partie **A**, vérifier que la formule établie par Nabolos fonctionne lorsque $n = 3$.

b. Calculer en fonction de n : $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^n$.

c. Démontrer la conjecture émise par Nabolos.
On pourra (sans le démontrer) utiliser le résultat suivant : $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 3



On considère un cube ABCDEFGH.
I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [DH].
K et M sont les points tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{HK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

- Partie A -

L'objectif de cette exercice est de montrer que le point M appartient au plan (IJK).
On considère le repère de l'espace $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. a. Donner les coordonnées des points I, J, K et M.

b. En déduire celles des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$.

2. Déterminer les réels α et β tels que $\overrightarrow{\mathrm{IM}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{IJ}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{IK}}$. Conclure.

- Partie B -

Tracer la section du cube avec le plan (IJK) (aucune justification n'est attendue).