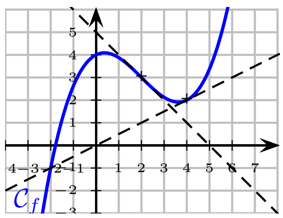
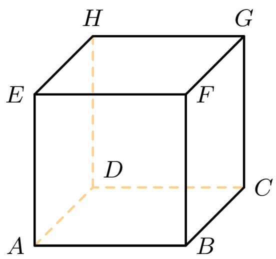
Lycée Louise Michel 2021/2022
Terminale

MATHEMATIQUES
Préparation au devoir surveillé

Exercice 1

Enoncé	Réponse
1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$ par : $$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$ On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 ?	$\frac{\mathrm{e}^2}{4}$
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$h(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x$$ Donner la fonction dérivée de h sous la forme d'un produit.	$f'(x) = \mathrm{e}^x(2x+1)$
3. Pour tout réel x, $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}}$ est égal à :	Entourer la bonne réponse : **a.** -1 **b.** e^{-2x} $\boxed{\textbf{c.}\ (\mathrm{e}^x)^2}$ **d.** e^0
4. Donner l'ensemble des solutions de l'équation : $$x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x = 0$$	$\mathscr{S} = \{0\ ;\ 1\}$
5. Dresser le tableau de variations (sur son ensemble de définition) de la fonction f définie par : $$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & & \nearrow & \mathrm{e}^{-1} & \searrow & \end{array}$
6. Donner la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1-\mathrm{e}^x}{3}$	$-\frac{\mathrm{e}^x}{3}$
7. Donner la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$	$\frac{(x-1)^2\mathrm{e}^x}{(x^2+1)^2}$

Enoncé	**Réponse**
8. Soit : $P(x) = 2x^2 - 2x - 12$ Donner les solutions de l'équation $P(x) = 0$.	3 et -2
9. Soit $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{x}$. Donner $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient.	$\dfrac{x^2-5}{5x^2}$
10. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentant la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.	$y = x + 1$
11. Soit $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Donner sous forme factorisée $f'(x)$.	$(x+1)\mathrm{e}^x$
12. Les droites sont les tangentes aux points d'abscisses 2 et 4.  $f'(4) \times f'(2)$ est égal à :	$-\dfrac{1}{2}$
13. Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$. $u_2 = ...$	$\dfrac{5}{3}$
14. Compléter : Pour tout entier naturel n : $3^{n+1} - 2 \times 3^n = 3^{....}$	n
15. Soit u la suite définie par : $u_n = -2n + 4$. $u_{n+1} - u_n = ...$	-2
16. Dresser le tableau de signe de la fonction f définie par : $f(x) = 4 - x^2$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -2 & & 2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$
17. u est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $u_1 = 3$. Exprimer u_n en fonction de n.	$u_n = 3 \times 1,2^{n-1}$
18. On considère la suite u définie par $u_0 = 200$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 22$. Quelle est la valeur de u_1 ?	212
19. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$. 	$\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC}$

Exercice 2

- Partie A -

Valeur de k		0	1	2	
Valeur de U	0	3	10	29	
Valeur de S	0	3	13	42	

Lorsque l'on exécute l'algorithme avec $N = 3$, la valeur de U obtenue est 29 et la valeur de S est 42.

- Partie B -

1. La propriété P_n est : $\forall n \in N \quad u_n \geqslant n$.

- **Initialisation :** $u_0 = 0$ et on a bien $0 \geqslant 0$ donc la propriété est donc vraie au rang 0 ;
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé quelconque.
  On suppose vraie la propriété au rang n, c'est à dire $u_n \geqslant n$. On montre qu'elle est vraie au rang $(n+1)$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant n+1$.
  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2n + 3 \\ &\geqslant 3n - 2n + 3 \quad \text{car on a supposé } u_n \geqslant n. \\ &\geqslant n + 3 \\ &\geqslant n + 1 \quad \text{car } n+3 \geqslant n+1 \end{aligned}$$
  D'où P_{n+1} est vraie.
  On a ainsi démontré que P_n vraie implique P_{n+1} vraie.
- **Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, pour pout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (3u_n - 2n + 3) - u_n \\ &= 2u_n - 2n + 3 \\ &\geqslant 2n - 2n + 3 \text{ car } u_n \geqslant n. \\ &\geqslant 3 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui signifie que $u_{n+1} \geqslant u_n$. On en déduit que la suite u est croissante.

3. a. On obtient $b_0 = 1$, $b_1 = 3$ et $b_2 = 9$.
On remarque que $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_1}{b_0} = 3$, on peut donc conjecturer que (b_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) + 1 \\ &= 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 \\ &= 3(u_n - n + 1) \\ &= 3b_n \end{aligned}$$

on en déduit que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison 3.

c. En utilisant le résultat précédent, on en déduit que :
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= b_n + n - 1 \\ &= b_0 \times 3^n + n - 1 \\ &= 3^n + n - 1 \end{aligned}$$

4. a. Pour $n = 3$, on obtient $S_3 = \dfrac{3^4 + 3^2 - 3 - 3}{2} = 42$. On retrouve bien le résultat obtenu par l'algorithme dans la partie A.

b. $1 + 3 + ... + 3^n = \dfrac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \dfrac{1}{2} \times (3^{n+1} - 1)$.

c. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{k=n} 3^k}_{=\frac{1}{2}\times(3^{n+1}-1)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{k=n} k}_{=\frac{n(n+1)}{2}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{k=n} 1}_{=n+1}.$

Ainsi, $S_n = \frac{1}{2} \times (3^{n+1} - 1) + \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = \frac{3^{n+1} - 1 + n(n+1) - 2(n+1)}{2} = \frac{3^{n+1} + n^2 - n - 3}{2}$.

Exercice 3

- PARTIE A -

1. a. Dans le repère de l'espace $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on lit aisément les coordonnées des points I, J, K et M :

$$I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right) \quad ; \quad J\left(0\,;1\,;\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad K\left(\frac{1}{4}\,;1\,;1\right) \quad ; \quad M\left(0\,;\frac{2}{3}\,;0\right)$$

b. On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$:

Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M - x_I \\ y_M - y_I \\ z_M - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, de même $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et enfin $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Les valeurs de α et β telles que $\overrightarrow{IM} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$ vérifient le système d'équations suivant $\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha + \beta = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}\alpha + \beta = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha + \beta = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}\alpha + \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\alpha - \left(\frac{2}{3} - \alpha\right) = -2 \\ \beta = \frac{2}{3} - \alpha \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} - \alpha \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

En remplaçant α par $\frac{4}{3}$ et β par $\left(-\frac{2}{3}\right)$, on montre que la dernière équation est vérifiée : $\frac{4}{3} + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$.

On en déduit que $\overrightarrow{IM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IJ} - \frac{2}{3}\overrightarrow{IK}$ et donc que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires et, par conséquent que le point M appartient au plan (IJK).

- PARTIE B -