MATHEMATIQUES
Combinatoire et dénombrement : entraînement (corrigé)

Exercice 1

1. a. Si le tirage est effectué avec remise, il y a 9 choix possibles pour chaque chiffre.

Ainsi, il y a $9^3 = 729$ nombres possibles.

Principe des cases

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3
9 choix	9 choix	9 choix

Pour remplir la première case, il y a dix choix possibles. Pour chacun de ces choix, pour remplir la deuxième, il y a 10 choix possibles(puisque la première boule est remise dans l'urne) et il en est de même pour la troisième case.

b. Un nombre est pair si et seulement si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8. Ici, le 0 n'est pas disponible, ce qui ne laisse que 4 possibilités pour le dernier chiffre. Les deux premiers n'ont aucune restriction.

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3
9 choix	9 choix	4 choix

Il y a donc $9 \times 9 \times 4 = 324$ nombres pairs constructibles.

2. a. Si le tirage est effectué sans remise, l'urne ne contient plus que 8 boules après le premier tirage, puis 7 après le second. Ainsi :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3
9 choix	8 choix	7 choix

On peut construire $9 \times 8 \times 7 = 504$ nombres différents.

b. Si le chiffre 7 est interdit, cela laisse 8 possibilités pour le premier chiffre, 7 pour le deuxième et 6 pour le troisième :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3
8 choix	7 choix	6 choix

soit $8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités.

c. On va répartir ces cas selon le dernier chiffre du nombre :

- si le dernier chiffre est 5, il y a 8 possibilités pour le premier chiffre et 7 pour le deuxième :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3
8 choix	7 choix	1 choix

soit 56 possibilités ;

- le même raisonnement est valable si le dernier chiffre est 8.

Il y a donc en tout 112 nombres constructibles ayant 5 ou 8 comme dernier chiffre.

3. a. On fait un choix simultané de 3 boules parmi 9.

Il y a donc $\dbinom{9}{3} = \dfrac{9!}{3!6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ tirages possibles.

Combinaisons

Les combinaisons permettent de modéliser les tirages simultanées puisque l'ordre n'intervient pas.

b. Si l'on interdit les numéros 3 et 6, il ne reste plus que 7 nombres parmi lesquels on en tire 3, soit $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 35$ possibilités.

c. Si le numéro 2 est tiré mais pas le numéro 4 ou le numéro 6, il reste 2 numéros à tirer parmi 6 restants, soit $\binom{6}{2} = \dfrac{6\times 5}{2} = 15$ combinaisons.

Exercice 2

1. Pour chacun des trois éclats, on a deux possibilités (bref ou long). Ainsi :

Eclat 1	Eclat 2	Eclat 3
2 choix	2 choix	2 choix

Il y a $2^3 = 8$ signaux constitués de 3 éclats lumineux.

2. On cherche le nombre de signaux de six éclats constitués de deux éclats brefs exactement.

Voici deux exemples de tels signaux :

Eclat 1	Eclat 2	Eclat 3	Eclat 4	Eclat 5	Eclat 6
bref	long	long	bref	long	long

Eclat 1	Eclat 2	Eclat 3	Eclat 4	Eclat 5	Eclat 6
long	bref	long	long	long	bref

Cela revient donc à déterminer le nombre de combinaisons de deux éléments parmi six.

Il y a $\binom{6}{2}$ soit 15 signaux constitués de 2 éclats brefs exactement.

3.
- Il y a 2^1 signaux avec 1 éclats.
- Il y a 2^2 signaux avec 2 éclats.
- Il y a 2^3 signaux avec 3 éclats.

Ainsi, il y a $2^1+2^2+2^3 = 14$ signaux constitués d'au plus 3 éclats.

Au plus

Au plus 3, c'est 1, 2 ou 3.Mais pas 0 car autrement il n'y aurait aucun signal !

4. Avec 1 éclat, on peut faire 2 signaux et donc distinguer au plus deux phares.
Avec 2 éclats, on peut faire 4 signaux et donc distinguer au plus 4 phares.
Cela signifie qu'avec un ou deux éclats on peut distinguer $2^1 + 2^2$ soit 6 phares.

Pour déterminer le nombre minimum d'éclats qu'il faut pour distinguer 30 phares, on cherche le plus petit entier n tel que $2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n \geqslant 30$. On trouve $n = 4$.
Il faut donc considérer au minimum 4 éclats pour pouvoir distinguer 30 phares.

Exercice 3

1. Pour les deux dernières cases, il reste à chaque fois 3 choix puisqu'il ne faut pas que deux cases voisines aient le même motif. Ainsi, Il y a $3^2 = 9$ façons de compléter le drapeau.

2. Suivant le même principe que dans la question précédente, il y a $3^3 = 27$ façons de compléter le drapeau.

3. On a quatre choix pour la première case puis plus que trois pour chacune des 5 cases suivantes.
Il y a donc $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 4 \times 3^5$ drapeaux possibles.

4. Pour créer un drapeau avec deux motifs, par exemple $\diamondsuit$ et $\clubsuit$, on a deux drapeaux possibles :

$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$

$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$

Ainsi pour chaque paire de motifs on a deux possibilités. Le nombre de paires de motifs que l'on peut avoir est le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 4, soit $\binom{4}{2} = 6$ paires possibles. Avec chacune de ces paires, on peut faire 2 drapeaux.
Il y a donc $6 \times 2 = 12$ façons de créer un drapeau composé uniquement de 2 motifs.

Exercice 4

1. Une issue est un quadruplet de chiffres dont le premier est 2.

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4
2	10 choix	10 choix	10 choix

L'univers contient 1 000 issues équiprobables.

X prend les valeurs 1, 2, 3 et 4.

- L'événement $X = 4$ contient une seule issue (le bon code).
- L'événement $X = 1$ contient les issues du type :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4
2	9 choix	9 choix	9 choix

Pourquoi 9 choix ?
$X = 1$ est l'événement "un seul chiffre est bien placé". Le 2 en premier est bien placé et ensuite 9 choix car il ne faut pas que ce soit le bon chiffre à chaque fois.

Il y a donc $9 \times 9 \times 9 = 729$ issues favorables à cet événement.

- L'événement $X = 2$ contient les issues du type :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4
2	1 choix	9 choix	9 choix

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4
2	9 choix	1 choix	9 choix

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4
2	9 choix	9 choix	1 choix

Explications

$X = 2$ signifie qu'il y a deux chiffres bien placés dont le premier. Il en reste donc un bien placé. Celui-ci peut-être deuxième, troisième ou quatrième position, d'où les trois types d'issues favorables qu'il faut ajouter.

- L'événement $X = 3$ contient les issues du type :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4
2	1 choix	1 choix	9 choix

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4
2	1 choix	1 choix	9 choix

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4
2	9 choix	1 choix	1 choix

Explications

$X = 3$ signifie qu'il y a trois chiffres bien placés dont le premier. Il en reste donc deux bien placés. Ceux-ci peuvent-être en deuxième et troisième ou deuxième et quatrième ou troisième et quatrième position, d'où les trois types d'issues favorables qu'il faut ajouter.

Il y a donc 27 issues favorables à cet événement.

- Loi de X :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,729	0,243	0,027	0,001

Explications

Puisque les 1000 issues sont équiprobables, on a par exemple : $P(X = 1) = \dfrac{729}{1000} = 0,729$

2. $E(X) = 0,729 \times 1 + 0,243 \times 3 \times 0,027 + 4 \times 0,001 = 1,3$.
En moyenne le nombre de chiffre bien placé si l'on répète un grand nombre de fois cette expérience est 1,3.