Terminale

MATHEMATIQUES
Combinatoire et dénombrement : corrigé entraînement savoir-faire (1)

Exercice 1

1. Puisque A et B sont disjoints,

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 8 + 11 = 19$.
Par ailleurs $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 8 \times 11 = 88$.

Les deux principes

On obtient ces résultats grâce au principe additif et au principe multiplicatif dans le cas d'ensembles disjoints.

2. Puisque A et B sont disjoints,
$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, soit $\text{Card}B = \text{Card}(A \cup B) - \text{Card}(A) = 32 - 20 = 12$.
Par ailleurs, $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 20 \times 12 = 240$.

3. Puisque $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$, on a alors $\text{Card}(B) = \dfrac{\text{Card}(A \times B)}{\text{Card}(A)} = \dfrac{108}{9} = 12$.
De plus, A et B étant disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 9 + 12 = 21$.

4. **a.** Ici, $\text{Card}(A) = 6$ et $\text{Card}(B) = 2$. On a donc $\text{Card}(A \times B) = 5 \times 2 = 12$.

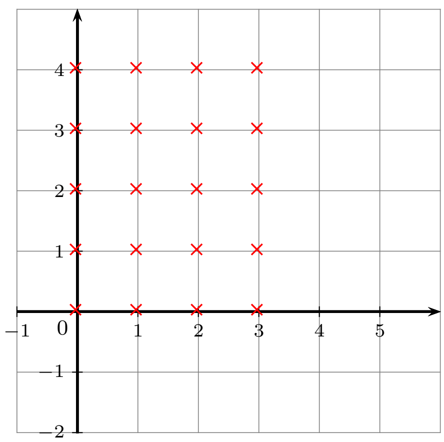
b. Les éléments de $A \times B$ sont $(m;0)$, $(m;1)$, $(a;0)$, $(a;1)$, $(t;0)$, $(t;1)$, $(h;0)$, $(h;1)$, $(g;0)$, $(g;1)$, $(m;0)$, $(m;1)$.
On en trouve bien 12.

Exercice 2

1. L'ensemble A est constitué des couples $(0;0)$, $(0;1)$, $(0;2)$, $(0;3)$, $(0;4)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(1;2)$, $(1;3)$, $(1;4)$, $(2;0)$, $(2;1)$, $(2;2)$, $(2;3)$, $(2;4)$, $(3;0)$, $(3;1)$, $(3;2)$, $(3;3)$, $(3;4)$.
Ils résultent donc du produit cartésien de E et F avec $E = \{0;1;2;3\}$ et $F = \{0;1;2;3;4\}$.

2. On a $\text{Card}(E) = 4$ et $\text{Card}(F) = 5$ donc $\text{Card}(E \times F) = 4 \times 5 = 20$.
A est composé de 20 éléments.

3. Représentation graphique :



Exercice 3

1. Cela revient à chercher les 6-uplets d'un ensemble à 256 éléments.

Il y a 256^4 adresses IPv4 possibles, soit 4 294 967 296, ce qui est insuffisant pour identifier 5 milliards d'ordinateurs de manière unique.

Attention

Entre 0 et 255 inclus, il y a bien 256 nombres au total.

2. Il existe 256^6 adresses IPv6, soit environ $2,8 \times 10^{14}$ adresses soit approximativement deux cent mille milliards d'adresses.

Exercice 4

1. Un numéro de téléphone est composé de 10 chiffres.

Ecrire un numéro de téléphone revient à remplir 10 cases numérotées :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4	Chiffre 5	Chiffre 6	Chiffre 7	Chiffre 8	Chiffre 9	Chiffre 10
0	6	7	10 choix	10 choix	10 choix	10 choix	10 choix	10 choix	10 choix

Il existe donc 10^7 numéros commençant par 06 7.
Pour les mêmes raisons, il y a aussi 10^7 numéros commençant par 06 8 .

Pour cette tranche, Orange dispose donc de 2×10^7 numéros.

k-upplets

10^7 est le nombre de 7-upplets d'un ensemble à 10 éléments.

2. • Nombre de numéros commençant par 06 58 :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4	Chiffre 5	Chiffre 6	Chiffre 7	Chiffre 8	Chiffre 9	Chiffre 10
0	6	5	8	10 choix	10 choix	10 choix	10 choix	10 choix	10 choix

Il existe 10^6 numéros commençant par 06 58.

• Il en est de même pour les nombres commençant par 06 59, 06 60, ... , 06 68, ce qui donne 11×10^6 soit 11 millions de numéros.

• Nombre de numéros commençant par 06 69 puis un chiffre compris entre 0 et 7 inclus :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4	Chiffre 5	Chiffre 6	Chiffre 7	Chiffre 8	Chiffre 9	Chiffre 10
0	6	6	9	8 choix	10 choix	10 choix	10 choix	10 choix	10 choix

Ce qui donne $8 \times 10^5 = 800\,000$ possibilités.

• Conclusion : Au total, ce sont donc 11 800 000 numéros qui sont attribués à Bouygues Télécom sur cette tranche.

Exercice 5

1. Un mot de quatre lettres est un 4-uplet de l'ensemble des lettres $\{A; B; C; D\}$. Il y en a $4^4 = 256$.

En utilisant le principe des cases :

Lettre 1	Lettre 2	Lettre 3	Lettre 4
4 choix	4 choix	4 choix	4 choix

2. Il y a $4^5 = 1024$ mots de 5 lettres et $4^6 = 4096$ mots de 6 lettres. Au total, il y a donc $4096 + 1024 = 5120$ mots de 5 ou 6 lettres.

Exercice 6

Former un mot revient à remplir quatre cases numérotées de 1 à 4. Pour remplir la première, il y a 10 choix possibles. Pour chacun de ces choix, pour remplir la deuxième, il y a 9 choix possibles puisque l'urne ne contient plus que 9 boules. Donc pour remplir les deux premières cases, il y a $10 \times 9 = 90$ choix possibles, et ainsi de suite jusqu'à la quatrième case.

Lettre 1	Lettre 2	Lettre 3	Lettre 4
10 choix	9 choix	8 choix	7 choix

On voit que l'on peut obtenir $10 \times 9 \times 8 \times 7$, soit 5040 mots différents.

Exercice 7

1. a. En utilisant le principe des cases :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4
4 choix	3 choix	2 choix	1 choix

Il y a quatre choix possibles pour le premier chiffre (puisque le 0 est autorisé), et pour chacun de ces choix, il reste trois choix possibles pour le 2ième chiffre, etc...

Si le 0 est autorisé en première position, il y a $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ configurations possibles.

Permutations
4! est le nombre de permutations d'un ensemble à 4 éléments.

b. En utilisant le principe des cases :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4
3 choix	3 choix	2 choix	1 choix

Si le 0 est interdit, cela laisse 3 possibilités pour le premier chiffre. On réorganise alors les 3 chiffres restants en faisant une permutation. Le nombre de configurations est donc de $3 \times 3! = 18$.

2. a. En utilisant le principe des cases :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3
3 choix	3 choix	2 choix

Si le chiffre 0 est interdit en première position, cela donne 3 possibilités pour le 1er chiffre, 3 pour le deuxième et 2 pour le troisième, soit 18 possibilités au total.

b. Un nombre est un multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est aussi un multiple de 3. Ici, les seules possibilités pour construire un tel nombre sont d'utiliser les chiffres 1, 2 et 3 ou les chiffres 1, 2 et 0. Dans les deux cas, il y a $3! = 6$ configurations possibles. Au total, il y a donc 12 nombres respectant les conditions imposées.