MATHEMATIQUES
Dérivation, continuité et convexité : entraînement 1

Exercice 1

1. Soit la fonction polynôme P définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$$

a. Etudier les variations de P.

b. Montrer que, sur $\mathbf{R}$, l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique α.

c. En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbf{R}$.

2. Soit l'intervalle $I =]-1\ ;\ +\infty[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3+1}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

a. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-P(x)}{(x^3+1)^2}$.

c. En utilisant les résultats de la question **1.**, étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variations.

d. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

e. Etudier les positions respectives de $\mathcal{C}$ et de T sur I.

3. a. Vérifier et justifier que α est compris entre 0,6 et 0,61.

b. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{3\alpha^2}$.

(*On pourra utiliser le résultat suivant : deux nombres sont égaux si, et seulement si leur différence est nulle)*

c. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,2.

4. Démontrer que $\mathcal{C}$ admet deux droites asymptotes que l'on précisera par leurs équations.

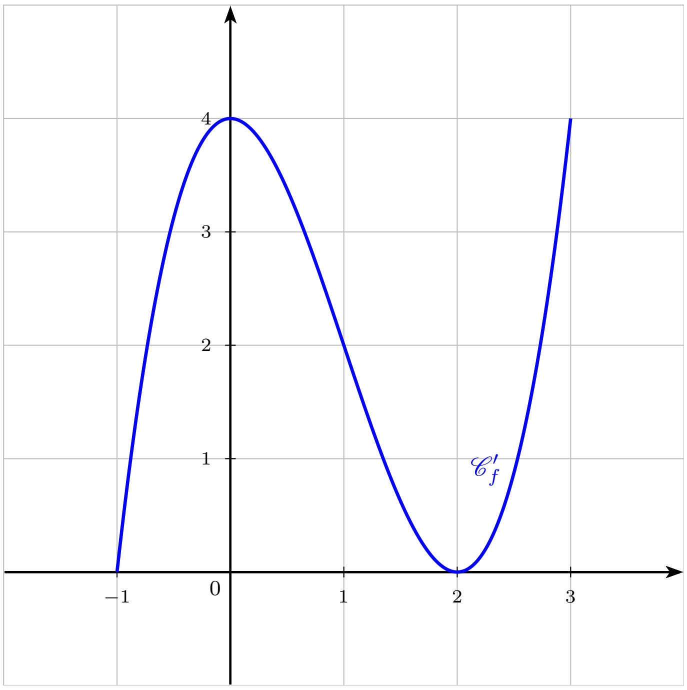
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

f est une fonction définie et dérivable sur $I = [-1\ ;\ 3]$.

On dispose des informations suivantes :

- la courbe représentative de sa dérivée $\boldsymbol{f'}$ est donnée ci-dessous ;
- $f(-1) > 0$.



Pour chacune des affirmations suivantes, on indiquera si elle vraie ou fausse.
Chaque réponse sera soigneusement justifiée.

1. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est horizontale.

2. f est strictement croissante sur I.

3. f admet un extremum en 2.

4. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur I.

5. f'' est négative sur $[0\ ;\ 2]$ (f'' désigne la dérivée de f').

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 3

Soit (r_n) la suite définie par $r_0 = 6$ et $r_{n+1} = \sqrt{r_n + 4}$ pour tout entier naturel n.

1. Représenter les premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.

2. Démontrer par récurrence que la suite est décroissante et minorée par 2.

3. Justifier que (r_n) converge vers un réel L puis déterminer L.