MATHEMATIQUES
Dérivation, continuité et convexité : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. a. P est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbf{R}$.
$P'(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1)$ admet deux racines :

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = -\frac{1}{2}$$

Il est du signe de a partout sauf entre ses racines.
Comme $a = 12$, on en déduit :

Autrement
Il est toujours possible de calculer Δ et compagnie...

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty\\ &\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - 2 = +\infty\end{aligned}\right\}\ \text{Par somme, } \lim_{x\to+\infty}\left(4x^3+3x^2-2\right) = +\infty$$

Méthode
Pour déterminer la limite en l'infini d'une fonction polynôme, après avoir identifié une forme indéterminée, factorisez par le terme de plus haut degré et utilisez la limite d'un produit.

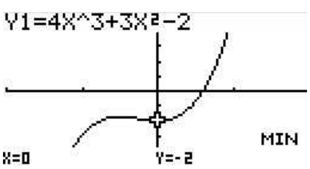
$$4x^3 + 3x^2 - 2 = 4x^3\left(1 + \frac{3x^2}{4x^3} - \frac{2}{4x^3}\right) = 4x^3\left(1 - \frac{3}{4x} - \frac{1}{2x^3}\right).$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{3}{4x} - \frac{1}{2x^2}\right) = 1\\ &\lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty\end{aligned}\right\}\ \text{Par produit, } \lim_{x\to-\infty} 4x^3\left(1 - \frac{3}{4x} - \frac{1}{2x^2}\right) = -\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3+3x^2-2) = -\infty$.

x	$-\infty$		$-0{,}5$		0		α		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$P(x)$	$-\infty$	↗	$-1{,}75$	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$

Remarques
Utilisez votre calculatrice pour "vérifier" le tableau et pour déterminer les valeurs remarquables.



Calculatrice
On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -2$, $X_{Max} = 2$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 5$ et $Y_{Scale} = 1$.
Avec le solveur graphique Gsolv, puis MIN ou MAX on obtient les valeurs remarquables.

b. On utilise le TVI.

- P est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbf{R}$.
- P est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, d'après le tableau de variations.
- $P(0) = -2$. et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$. Et $0 \in [-2\ ;\ +\infty[$.

N'oubliez pas !

On utilise le corollaire du TVI sur un intervalle sur lequel la fonction est strictement monotone.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution α.

Sur $]-\infty\ ;\ 0[$, P est strictement négative d'après le tableau de variations, donc l'équation $P(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $]-\infty\ ;\ 0[$.
Donc l'équation $P(x) = 0$ admet sur $\mathbf{R}$ une unique solution α.

c. D'après le tableau de variations, on déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	

2. a. Calculs des limites.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^3+1		$-$	0	$+$	

Rappel

La fonction $x \longmapsto x^3 + 1$ s'annule en -1 et elle est strictement croissante (comme la fonction cube).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 2x + 1 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^3 + 1 = 0^+ \end{array}\right\} \text{ Par quotient, } \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2x+1}{x^3+1} = -\infty$$

Méthode

Pour déterminer la limite en l'infini d'une fonction rationnelle, après avoir identifié une forme indéterminée, factorisez au numérateur et au dénominateur par le terme de plus haut degré et utilisez la limite d'un quotient.

$$\frac{2x+1}{x^3+1} = \frac{2x\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)}{x^3\left(1 + \dfrac{1}{x^3}\right)} = \frac{2\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^3}\right)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par produit, } \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right) = 1 \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} 2\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par quotient, } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^3}\right)} = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x^3+1} = 0$.

b. f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition.

Autrement

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1\ ;\ +\infty[$, donc f est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x^3+1$.

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3x^2$, donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{2}^{u'(x)}\overbrace{(x^3+1)}^{v(x)} - \overbrace{3x^2}^{v'(x)}\overbrace{(2x+1)}^{u(x)}}{\underbrace{(x^3+1)^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{-4x^3-3x^2+2}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{-P(x)}{(x^3+1)^2} \end{aligned}$$

c. D'après le tableau de variations de P, on sait que $\alpha > 0$.

x	-1		α		$+\infty$
$-P(x)$		$+$	0	$-$	
$(x^3+1)^2$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Evidement

$P(x)$ et $-P(x)$ ont des signes opposés.

d. La tangente a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Or, $f'(0) = 2$ et $f(0) = 1$, donc une équation de T est $y = 2x+1$.

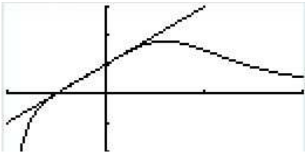
Méthode

Cette méthode est à connaître. Si $f(x) - (2x+1) > 0$ alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sinon c'est le contraire.

e. On étudie le signe de la différence : $f(x) - (2x+1)$.

$$\begin{aligned} f(x) - (2x+1) &= \frac{2x+1}{x^3+1} - (2x+1) \\ &= \frac{2x+1}{x^3+1} - \frac{(2x+1)(x^3+1)}{x^3+1} \\ &= \frac{(2x+1) - (2x+1)(x^3+1)}{x^3+1} \\ &= \frac{(2x+1)(1-(x^3+1))}{x^3+1} \\ &= \frac{-x^3(2x+1)}{x^3+1} \end{aligned}$$

x	-1		$-0{,}5$		0		$+\infty$
$-x^3$		$+$		$+$		$-$	
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) - (2x + 1)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
Position		$\mathcal{C}$est en-dessous de T		$\mathcal{C}$est au-dessus de T		$\mathcal{C}$est en-dessous de T	



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -1$, $X_{Max} = 2$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -2$, $Y_{Max} = 3$ et $Y_{Scale} = 1$.
La position ne peut pas être précisément déterminer avec cette représentation graphique.

3. a. $P(0{,}6) \approx -0{,}056 < 0$ et $P(0{,}61) \approx 0{,}024\,2 > 0$, donc α est compris entre 0,6 et 0,61.

b.

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{2}{3\alpha^2} &= \frac{2\alpha+1}{\alpha^3+1} - \frac{2}{3\alpha^2} \\ &= \frac{(2\alpha+1)(3\alpha^2) - 2(\alpha^3+1)}{(\alpha^3+1)3\alpha^2} \\ &= \frac{4\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2}{(\alpha^3+1)3\alpha^2} \\ &= \frac{P(\alpha)}{(\alpha^3+1)3\alpha^2}, \\ &= 0 \end{aligned}$$

Méthode

La méthode est donnée par l'énoncé. Suivez-là !

donc $f(\alpha) = \dfrac{2}{3\alpha^2}$.

c.

$$\begin{array}{rcll} 0{,}6 & < \alpha < & 0{,}61 & \\ 0{,}36 & < \alpha^2 < & 0{,}372\,1 & \\ 1,08 & < 3\alpha^2 < & 1,1163 & \\ \dfrac{2}{1,08} & > \dfrac{2}{3\alpha^2} > & \dfrac{2}{1,1163} & \text{Car la fonction inverse est strictement décroissante sur}]0\ ;\ +\infty[\\ 1,852 & > \dfrac{2}{3\alpha^2} > & 1,792 & \text{En utilisant des valeurs approchées} \\ 1,9 & > \dfrac{2}{3\alpha^2} > & 1,7 & \text{Encadrement d'amplitude 0,2} \end{array}$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$, donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Exercice 2

1. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est horizontale. **Faux**.

$f'(0) = 4$ d'après la courbe représentative de f'.
Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est 4.

Attention

Il s'agit de la courbe représentative de la fonction f' qui est donnée. On lit $f'(0)$ comme l'image de 0 par la fonction f'. N'oubliez pas que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

2. f est strictement croissante sur I.**Vrai**.

La fonction f' est positive sur I et s'annule en -1 et 2, donc f est strictement croissante sur I.

Le théorème

Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	-1		2		3
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$		$\nearrow$		$f(3)$

3. f admet un extremum en 2. **Faux.**

D'après le tableau de variations précédent, la dérivée s'annule en 2 mais ne change pas de signe, donc f n'admet pas d'extremum en 2.

N'oubliez pas

En 2, la dérivée s'annule mais ne change pas de signe. Il n'y a donc pas de changement de variation en 2, donc pas d'extremum.

4. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur I. **Vrai**.

Puisque $f(-1 > 0$, alors $f(x) > 0$ pour tout réel x de I.

5. f'' est négative sur $[0\ ;\ 2]$ (f'' désigne la dérivée de f'). **Vrai**.

En effet f' est décroissante sur $[0\ ;\ 2]$ d'après la courbe représentative de f', donc sa dérivée f'' est négative sur cet intervalle.

Exercice 3

1. Voir graphique ci-dessous.

2. On veut montrer que $2 \leqslant r_{n+1} \leqslant r_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

— On considère la propriété : « $2 \leqslant r_1 \leqslant r_0$ ».
— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $r_0 = 6$ et $r_1 = \sqrt{10}$ donc $2 \leqslant r_0 \leqslant r_1$: la propriété est vraie pour $n = 0$.
— Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Supposons donc que $2 \leqslant r_{n+1} \leqslant r_n$ (hypothèse de récurrence), on a alors :

$$\begin{array}{ccccll} 6 & \leqslant & r_{n+1}+4 & \leqslant & r_n+4 & \\ \sqrt{6} & \leqslant & \sqrt{r_{n+1}+4} & \leqslant & \sqrt{r_n+4} & \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } [0\ ;\ +\infty[\\ 2 & \leqslant & \sqrt{r_{n+1}+4} & \leqslant & \sqrt{r_n+4} & \text{car } 2 \leqslant \sqrt{6} \\ 2 & \leqslant & r_{n+2} & \leqslant & r_{n+1}. & \end{array}$$

On a donc bien $2 \leqslant r_{n+1} \leqslant r_n$ c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On vient de montrer que la suite (r_n) est décroissante et minorée par 2.

3. La suite (r_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers un réel L.
La fonction f est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$ et pour tout entier naturel n, $r_{n+1} = f(r_n)$.
Donc L vérifie $L = f(L)$.

On résout l'équation $f(x) = x$:

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x+4} & = & x & \text{Chaque membre de cette équation est positif.} \\ x+4 & = & x^2 & \\ x^2 - x - 4 & = & 0 & \end{array}$$

Second degré

C'est une équation du second degré.... Δ et compagnie ou calculatrice :-)

Cette équation a deux solutions : $L_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ et $L_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} < 0$.

On en déduit que la suite (r_n) converge vers $L = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.