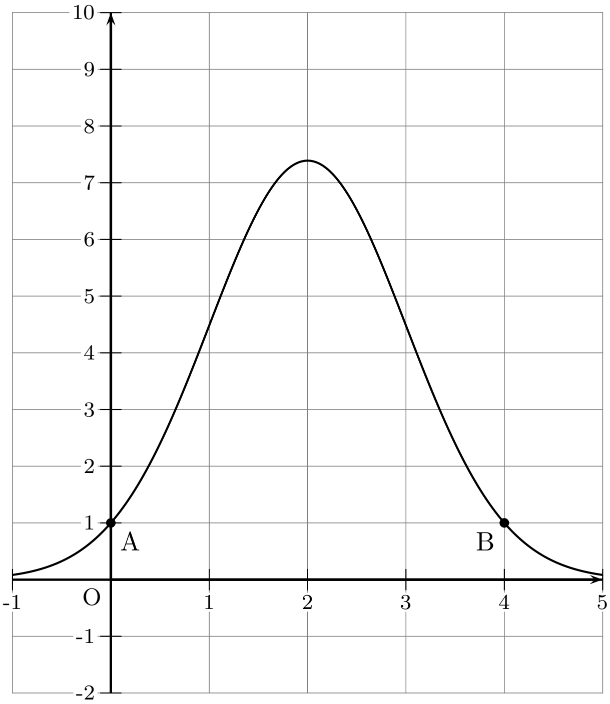
MATHEMATIQUES
Dérivation, continuité et convexité : entraînement 2

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-0,5x^2+2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous. Les points A et B appartiennent à $\mathscr{C}_f$.



1. a. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 1$.

b. Quelle interprétation graphique peut-on faire des solutions de l'équation précédente ?

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 3)\ \mathrm{e}^{-0,5x^2+2x}$$

b. En déduire la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion C et D dont on déterminera les coordonnées.

d. Placer les points C et D dans le repère.

Exercice 2

Dans cet exercice, f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ dont on donne ci-dessous, le tableau de variations, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	35	$\nearrow$	$+\infty$

1. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote verticale ?
Si oui, préciser son équation réduite et indiquer ce qui permet de l'affirmer.

2. Démontrer soigneusement que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $\mathscr{D}_f$.

3. On admet que f est définie sur $\mathscr{D}_f$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 80}{x - 2}$.
Donner sans justifier, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[4\ ;\ 9]$ par $f(x) = x + \sqrt{x} - 8$.
Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[4\ ;\ 9]$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Démontrer que f est continue sur $[0\ ;\ 2]$.

Rappel : Si n désigne un entier relatif, pour tout réel x de $[n\ ;\ n+1[$, $E(x) = n$.

Exercice 5

On considère les fonctions f et g définies et dérivables pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;8]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{3} + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^3}{27} - \frac{4x^2}{9} - x + 18$$

1. Les courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g, dans un repère orthogonal, sont tracées ci-dessous. Lire avec la précision permise par le graphique une valeur approchée des coordonnées de leur point d'intersection E.

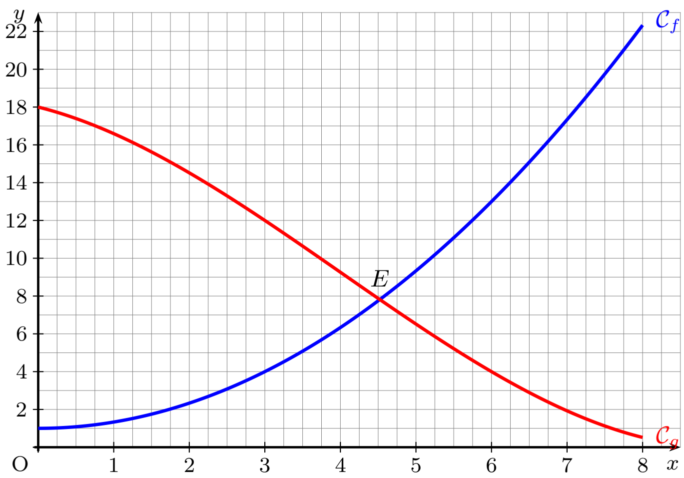
2. Afin de déterminer les coordonnées du point E de façon plus précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle $]0\,;8]$ l'équation $g(x) = f(x)$.

Pour cela, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;8]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

a. Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;8]$.

b. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $]0\,;8]$.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi de x_0 au centième.



3. Les fonctions f et g définies dans la partie A modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :

— $f(x)$ est la quantité, exprimée en milliers d'articles, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de x centaines d'euros ;

— $g(x)$ la quantité, exprimée en milliers d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x centaines d'euros.

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de x pour laquelle l'offre est égale à la demande.

a. Quel est, exprimé à l'euro près, le prix unitaire d'équilibre du marché ?

b. Quel nombre d'articles, (*arrondi à la centaine d'articles près*), correspond à ce prix unitaire d'équilibre ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....