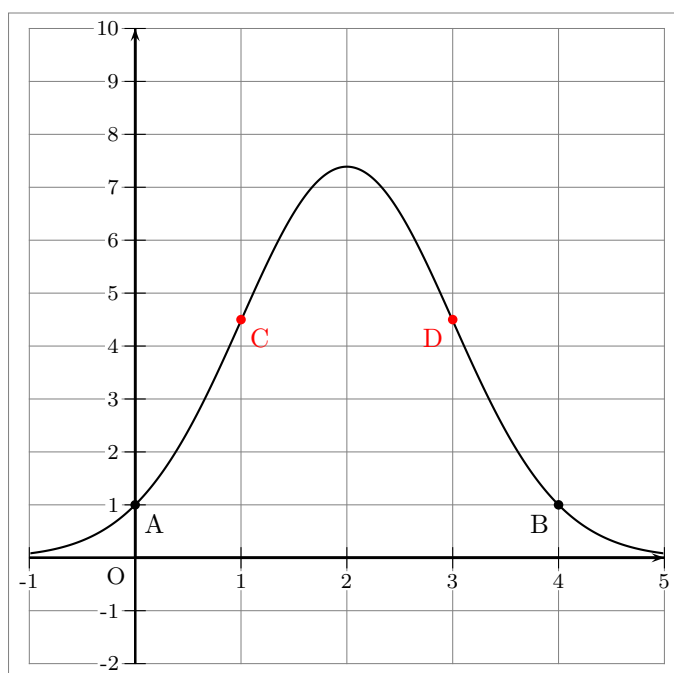


MATHEMATIQUES

Dérivation, continuité et convexité : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1



1. a.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 \\
 e^{-0,5x^2+2x} &= 1 \\
 e^{-0,5x^2+2x} &= e^0 \quad \text{On remplace 1 par } e^0 \text{ pour se ramener à une quation du type } e^X = e^Y \text{ qu'on sait résoudre.} \\
 -0,5x^2 + 2x &= 0 \quad \text{On utilise la propriété } e^X = e^Y \iff X = Y \\
 x(-0,5x + 2) &= 0 \quad \text{On factorise comme ici ou on utilise } \Delta \text{ puisque c'est une équation du second degré} \\
 x = 0 \quad \text{ou} \quad -0,5x + 2 &= 0 \\
 x = 0 \quad \text{ou} \quad x &= \frac{-2}{-0,5} = 4
 \end{aligned}$$

b. Les solutions de l'équation précédente correspondent graphiquement aux abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 1, c'est-à-dire les abscisses des points A et B.

Eh oui

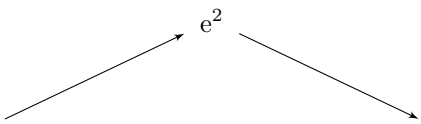
Vous devez savoir interpréter graphiquement les solutions d'une équation.

2. a. f est de la forme e^u de dérivée $f' = u'e^u$.

Ici, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = -0,5x^2 + 2x$ et donc $u'(x) = -0,5 \times 2x + 2 \times 1 = -x + 2$.

On obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \underbrace{(-x + 2)}_{u'(x)} \underbrace{e^{-0,5x^2+2x}}_{e^{u(x)}}$.

b. On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x + 2$	+	0	-
$e^{-0,5x^2+2x}$	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$$f(2) = e^{-0,5 \times 2^2 + 2 \times 2} = e^2 \simeq 7,4.$$

Encore une fois

Votre tableau de variations doit être cohérent avec la courbe donnée !

3. a. f' est de la forme uv de dérivée $f'' = u'v + uv'$.

Avec $u(x) = -x + 2$ et donc $u'(x) = -1$.

Et $v(x) = e^{-0,5x^2+2x}$ et donc $v'(x) = (-x + 2) e^{-0,5x^2+2x}$ d'après la question 2.a.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \underbrace{-1}_{u'(x)} \times \underbrace{e^{-0,5x^2+2x}}_{v(x)} + \underbrace{(-x+2)}_{u(x)} \underbrace{(-x+2) e^{-0,5x^2+2x}}_{v'(x)} \\
 &= (-1 + (-x+2)^2) e^{-0,5x^2+2x} \quad \text{On factorise par } e^{-0,5x^2+2x} \\
 &= (-1 + x^2 - 4x + 4) e^{-0,5x^2+2x} \quad \text{On développe } (-x+2)^2 \text{ qui revient à développer } (2-x)^2 \\
 &= (x^2 - 4x + 3) e^{-0,5x^2+2x} \quad \text{On réduit}
 \end{aligned}$$

b. On commence par étudier le signe de la fonction trinôme $x^2 - 4x + 3$ en utilisant le discriminant :
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$.

On en déduit que f' s'annule en $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3$.

$x^2 - 4x + 3$ est du signe de a partout, sauf entre ses racines 1 et 3. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 3$	$+$	0	$-$	0	$+$
$e^{-0,5x^2+2x}$	$+$		$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Convexité de f	f est convexe		f est concave		f est convexe

c. f'' s'annule ET change de signe en 1 et en 3.

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc deux points d'inflexion $C\left(1; e^{\frac{3}{2}}\right)$ et $D\left(3; e^{\frac{3}{2}}\right)$. En effet :

$$f(1) = e^{-0,5 \times 1^2 + 2 \times 1} = e^{\frac{3}{2}} \text{ et } f(3) = e^{-0,5 \times 3^2 + 2 \times 3} = e^{\frac{3}{2}}.$$

d. Voir le graphique sur la page précédente.

Exercice 2

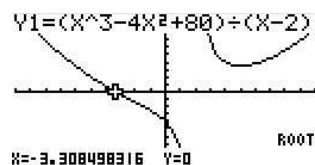
1. Comme $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, on en déduit que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
2. Sur $]2; +\infty[$, le minimum de f est $35 > 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $] -\infty; 2[$:

- f est continue;
- f est strictement décroissante;
- 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$;

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -\infty; 2[$.

3. Utilisation de la calculatrice :



$$-3,31 < \alpha < -3,30.$$

Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -10$, $X_{Max} = 10$, $X_{Scale} = 1$, $Y_{Min} = -100$, $Y_{Max} = 100$ et $Y_{Scale} = 10$.

Avec le solveur graphique Gsolv , puis $\boxed{\text{ROOT}}$ on obtient une valeur approchée de α .

Exercice 3

f est dérivable sur $[4; 9]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[4; 9]$ et $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Inutile

Il est inutile de mettre au même dénominateur, car le signe de la dérivée se détermine directement avec cette forme.

Comme $f'(x) > 0$ pour tout réel x de $[4; 9]$, on en déduit que f est strictement croissante sur $[4; 9]$.

On en déduit le tableau de variations :

x	4	x_0	9
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-2	0	4

- f est continue sur $[4 ; 9]$.
- f est strictement croissante sur $[4 ; 9]$.
- 0 est une valeur intermédiaire entre $f(4) = -2$ et $f(9) = 4$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $[4 ; 9]$.

Exercice 4

- Pour $x \in [0 ; 1[$, $E(x) = 0$. On en déduit que $f(x) = x^2$.
- Pour $x \in [1 ; 2[$, $E(x) = 1$. On en déduit que $f(x) = 1 + (1 - x)^2 = x^2 - 2x + 2$.
- Pour $x = 2$, $E(x) = 2$ et $f(2) = 2 + (2 - 2)^2 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0 ; 1[\\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \in [1 ; 2[\\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

f est continue sur $[0 ; 1[$ et sur $[1 ; 2[$ (ce sont des fonctions polynômes). Il faut encore montrer que f est continue en 1 et en 2 :

Continuité en 1 :

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 2x + 2 = 1$.
- $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 2 = 1$.

Donc f est continue en 1.

Continuité en 2 :

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x + 2 = 2$.
- $f(2) = 2$.

Donc f est continue en 2.

Conclusion : f est continue sur $[0 ; 2]$.

Exercice 5

- Partie A -

1. Par lecture graphique, les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont $E(4, 5 ; 7, 8)$.
2. a. Pour tout réel x de $]0 ; 8]$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(\frac{x^3}{27} - \frac{4x^2}{9} - x + 18 \right) - \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{x^3}{27} - \frac{4x^2}{9} - x + 18 - \frac{x^2}{3} - 1 \\ &= \frac{x^3}{27} - \frac{7x^2}{9} - x + 17 \end{aligned}$$

h est dérivable sur $]0 ; 8]$ et :

$$h'(x) = \frac{x^2}{9} - \frac{14x}{9} - 1 = \frac{x^2 - 14x - 9}{9}.$$

$x^2 - 14x - 9$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 232$.
Les deux racines sont $x_1 = 7 - \sqrt{58}$ et $x_2 = 7 + \sqrt{58}$.

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	$7 - \sqrt{58}$	$7 + \sqrt{58}$	$+\infty$	
Signe de $x^2 - 14x - 9$	+	0	-	0	+

Explications

N'oubliez pas que $\frac{x^3}{27} = \frac{1}{27}x^3$. Ainsi, la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{27}x^3$ est $x \mapsto \frac{1}{27} \times 3x^2 = \frac{3x^2}{27} = \frac{x^2}{9}$.

Par conséquent, sur l'intervalle $]0 ; 8]$, $h'(x) < 0$.

Explications

$7 - \sqrt{58} \simeq -0,62 < 0$ et $7 + \sqrt{58} \simeq 14,62 > 8$.

b. Comme $h'(x) < 0$ sur $]0 ; 8]$, la fonction h est strictement décroissante :

x	0	x_0	8
$h'(x)$		-	
$h(x)$	17	0	$\simeq -21,8$

c. Sur l'intervalle $]0 ; 8]$:

- h est continue ;
- h est strictement décroissante ;
- 0 est une valeur intermédiaire entre $-21,8$ et 17.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $]0 ; 8]$.

L'arrondi de x_0 au centième obtenu à la calculatrice est 4,52.

- Partie B -

1. D'après la question **2.c** de la **partie A**, le prix d'équilibre est de 4,52 centaines d'euros soit 452 €.

2. $f(4, 42) = \frac{4,42^2}{3} + 1 \simeq 7,81$.

Pour un prix de 452 €, les quantités échangées sont de 7 800 articles.