MATHEMATIQUES
Dérivation, continuité et convexité : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

Partie A : étude d'un cas particulier

1. Calcul de $C'(t)$.

On a pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$: $C(t) = 12 - 12\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}$.

La fonction C est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions dérivables) et :

$$\begin{aligned} C'(t) &= -12 \times \left(-\frac{7}{80}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} \\ &= \frac{12 \times 7}{80}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} \\ &= \frac{21}{20}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} \end{aligned}$$

Autrement

Sans modifier l'écriture de $C(t)$ on a :
$C'(t) = 12\left(0 - \left(-\frac{7}{80}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right) = \frac{21}{20}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}$.

$\frac{21}{20}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$,
donc la fonction C est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Le plateau est la limite de la fonction C en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} -\frac{7}{80}t = -\infty \\ \lim\limits_{T \to -\infty} \mathrm{e}^{T} = 0 \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{t \to +\infty} 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right) = 12.$$

Ainsi, $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = 12$.

Le plateau devrait être égal à 15 ; il n'est que de 12 donc le traitement n'est pas adapté.

Partie B : étude de fonctions

1. Calcul de la dérivée de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{105\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{u'(x)} \times \underbrace{\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)}_{v(x)} + \underbrace{\frac{105}{x}}_{u(x)} \times \underbrace{\left(0 - \left(-\frac{3}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)\right)}_{v'(x)} \\ &= \frac{-105}{x^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right) + \frac{105x}{x^2} \times \frac{3}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} \\ &= \frac{105}{x^2}\left(-1 + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{\frac{3}{40}}\right) \\ &= \frac{105\, g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

où g est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1$.

2. Sens de variation de f.

$f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.
D'après le tableau de variations de la fonction g, $g(x) < 0$ sur $]0~;~+\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]0~;~+\infty[$ et donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0~;~+\infty[$.

3. Solution de l' équation $f(x) = 5,9$.

x	0	1	α	80	$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$		
$f(x)$	‖	$\simeq 7{,}59$	5,9	$\simeq 1{,}31$	

Sur l'intervalle $[1~;~80]$:

- f est continue ;
- f strictement décroissante sur $[1~;~80]$;
- 5,9 est une valeur intermédiaire entre $f(1) = 105\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}}\right) \approx 7,59$ et $f(80) = \dfrac{105}{80}\left(1 - \mathrm{e}^{-6}\right) \approx 1,31$.

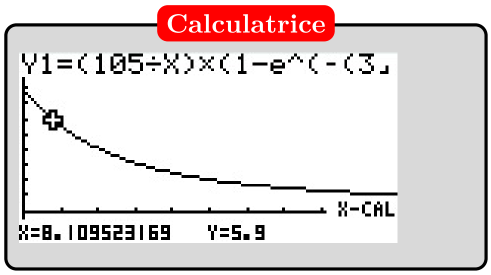
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha \in [1~;~80]$, tel que $f(\alpha) = 5,9$.

La calculatrice donne $f(8) \approx 5,92 > 5,9$ et $f(9) \approx 5,73 < 5,9$,

donc $8 < \alpha < 9$;

$f(8,1) \approx 5,902 > 5,9$ et $f(8,2) \approx 5,882 < 5,9$, donc $8,1 < \alpha < 8,2$.

On a donc au dixième près $a \approx 8,1$.



Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1. a. Puisque $C(t) = \dfrac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$, on a :
$C(6) = \dfrac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}\times 6}\right) = \dfrac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}a}\right) = f(a)$, d'après la question précédente.

b. On a vu dans la dernière question de la partie précédente que l'équation $f(a) = 5,9$ admet une solution unique et que cette solution vaut environ $8,1$.
On prendra donc $8,1$ comme valeur approchée de la clairance a de ce patient.

2. On obtient pour ce patient $C(t) = \dfrac{d}{8,1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$.

On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{d}{8,1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right) = \dfrac{d}{8,1}$.

On souhaite que $\dfrac{d}{8,1} = 15 \iff d = 15 \times 8,1 = 121,5$.
Le débit sera donc de $121,5$ micromole par heure pour avoir un plateau égal à 15 et donc un traitement efficace.

Exercice 2

1. La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.

Graphiquement, ce n'est qu'au point C que la fonction s'annule et change de signe. On en déduit que le point d'abscisse 3 de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

Attention

Au point d'abscisse -1, f'' s'annule mais ne change pas de signe. Le point d'abscisse -1 de la courbe représentative de f n'est donc pas un point d'inflexion.

2. Grâce au tableau de signes de la fonction f'', on déduit la convexité de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
Convexité de f		f est concave		f est concave		f est convexe	

f est concave sur $]-\infty\ ;\ 3]$ et convexe sur $[3\ ;\ +\infty[$.

3. Seule la courbe 2 présente une fonction concave sur $]-\infty\ ;\ 3]$ et convexe sur $[3\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3

1. $f(10) - f(0) = 10\mathrm{e}^{-1} - 30\mathrm{e}^{-3} \approx 2,185$. Le dénivelé de cette nouvelle piste est donc de 2 185 mètres.

2. Pour déterminer la difficulté de cette piste, il faut étudier les variations de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $(0\ ;\ 10]$. Pour cela on détermine $f''(x)$ et on étudie son signe.

On obtient :

$$f'(x) = (-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3} \text{ et } f''(x) = (-0,08x+0,4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$$

A vous !

Vérifiez ces deux résultats..... cela ne devrait pas vous poser de problème !

En effet, le signe de $f''(x)$ donne les variations de f'.

$-0,08x+0,4$ s'annule en $x = \dfrac{-0,4}{-0,08} = 5$.

Le tableau de variations de $f'(x)$ est donc :

x	0		5		20
$-0{,}08x+0{,}4$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{0,2x-3}$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$4\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

$f'(0) = 4e^{-3} \approx 0,199$ $\qquad$ $f'(5) = 2e^{-2} \approx 0,271$ $\qquad$ $f'(10) = 0.$

D'après le tableau de variation, la fonction f' admet sur l'intervalle $[0 ; 10]$ un maximum au point d'abscisse 5. Ce maximum a pour valeur approchée $0,271$. La pente maximum sera donc de 27,1 %, ce qui correspond à une piste rouge.