

MATHEMATIQUES

Dérivation, continuité et convexité : QCM (corrigé)

Exercice 1

1. $f(x) = (3x^4 - 2)^7$.

$f = u^7$ avec $u(x) = 3x^4 - 2$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f aussi.

$f' = 7u^6 \times u'$.

Comme $u'(x) = 12x^3$, on obtient, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{7(3x^4 - 2)^6}_{(u(x))^6} \times \underbrace{12x^3}_{u'(x)} \\ &= 84x^3(3x^4 - 2)^6 \end{aligned}$$

Réponse : c.

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

$f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Ainsi, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{2x}^{u'(x)}}{\underbrace{2 \times \sqrt{x^2 + 1}}_{2\sqrt{u(x)}}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

Réponse : c.

3. $f(x) = \frac{4}{(x^4 + 4)^4} = 4(x^4 + 4)^{-4}$.

A savoir

Si vous connaissez la formule de dérivation de $x \mapsto x^7$ (c'est $x \mapsto 7x^6$), vous connaissez celle de u^7 (c'est $7u^6 \times u'$). C'est la même mais on multiplie par u' .

Automatisme

Toujours rechercher la forme de la fonction pour calculer sa dérivée.

A savoir

Comme précédemment, si vous connaissez la formule de dérivation de $x \mapsto \sqrt{x}$ (c'est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$), vous connaissez celle de $\sqrt{u}$ (c'est $\frac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$). C'est la même mais on multiplie par u' .

Pensez-y !

Il est parfois utile de transformer l'écriture de la fonction de départ pour en calculer sa dérivée. Ici, pensez aux puissances négatives : $u^{-n} = \frac{1}{u^n}$.

f est de la forme $4 \times u^n$ avec $u(x) = x^4 + 4$ et $n = -4$.
Ainsi, $f' = 4 \times (-4)u^{-4-1} \times u' = -16u^{-5} \times u'$.

Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -16 \times \underbrace{(x^4 + 4)^{-5}}_{(u(x))^{-5}} \times \underbrace{4x^3}_{u'(x)} \\ &= -64x^3(x^4 + 4)^{-5} \\ &= \frac{-64x^3}{(x^4 + 4)^5} \end{aligned}$$

Autre façon de voir les choses

$$f(x) = \frac{4}{(x^4 + 4)^4} = 4 \times \frac{1}{(x^4 + 4)^4}.$$

f est de la forme $4 \times \frac{1}{u}$. On a donc $f' = 4 \times \frac{-u'}{u^2}$.

$$u(x) = (x^4 + 4)^4 \text{ et } u'(x) = 4(x^4 + 4)^3 \times 4x^3 = 16x^3(x^4 + 4)^3.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \frac{-16x^3(x^4 + 4)^3}{((x^4 + 4)^4)^2} \\ &= \frac{-64x^3(x^4 + 4)^3}{(x^4 + 4)^8} \\ &= \frac{-64x^3}{(x^4 + 4)^5} \end{aligned}$$

Réponse : c.

Exercice 2

x	-4	x_1	-3	x_2	-1	x_3	1
$f(x)$	-1	0	2	0	-1	0	$\sqrt{5}$

1. L'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions x_1 , x_2 et x_3 .

Réponse : d.

x	-4	$x_1 = -3$	-1	x_2	1
$f(x)$	-1	2	-1	2	$\sqrt{5}$

2.

Comme $\sqrt{5} > 2$, l'équation $f(x) = 2$ admet 2 solutions x_1 et x_2 .

Réponse : c.

3. Tous les nombres compris entre 2 et $\sqrt{5}$ possibles. Ainsi, k peut être égal à 2,1 ou 2,004.

Réponse : c. et d

Exercice 3

1. $f'(3)$ correspond graphiquement à la pente de la tangente T. Sa pente est (-1) donc $f'(3) = 1$.

Réponse b.

2. L'équation de la tangente T est $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ avec $f'(3) = -1$ et $f(3) = 2$ d'où $y = -(x-3) + 2 = -x + 5$.

Réponse c.

3. La tangente T traverse la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 3. On en déduit que $\mathcal{C}$ change de concavité au point A et donc que $f''(3) = 0$.

Réponse b.

4. Sur l'intervalle $[3; 7]$, la courbe $\mathcal{C}$ est convexe car au-dessus de ses tangentes donc, pour tout $x \in [3; 7]$, $f''(x) \geq 0$.

Réponse c.

5. La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ admet donc comme fonction dérivée $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$\begin{aligned} u(x) &= x - 1 & v(x) &= e^{x-3} \\ u'(x) &= 1 & v'(x) &= e^{x-3} \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } x \in [1; 7] : f'(x) = \frac{1 \times e^{x-3} - (x-1) \times e^{x-3}}{(e^{x-3})^2} = \frac{e^{x-3} \times (1 - (x-1))}{e^{x-3} \times e^{x-3}} = \frac{-x + 2}{e^{x-3}}.$$

Réponse d.