# MATHEMATIQUES
## Dérivation, continuité et convexité : entraînement savoir-faire

| Chapitre 7 : Dérivation, continuité et convexité. | Evaluation |
|---|---|
| **70.** Connaître et utiliser les dérivées des fonctions composées. | ●● \| ● \| ● \| ● \| ●● |
| **71.** Etudier et utiliser la convexité d'une fonction. | ●● \| ● \| ● \| ● \| ●● |
| **72.** Etudier une suite définie par une relation de récurrence. | ●● \| ● \| ● \| ● \| ●● |
| **73.** Connaître et utiliser le TVI. | ●● \| ● \| ● \| ● \| ●● |

## Exercice 1 70

**1.** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x+4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.

**2.** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto (-4x^2+5x-1)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.

**3.** Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{(2x-6)^4}$ est dérivable puis calculer $g'(x)$.

## Exercice 2 70

Déterminer les ensembles de définition $\mathscr{D}$ et de dérivabilité $\mathscr{D}'$ de $f$, puis calculer $f'(x)$.

**1.** $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

**2.** $f(x) = \left(\dfrac{3x-1}{2x-4}\right)^2$.

**3.** $f(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}$.

**4.** $f(x) = (2x-3)^5$.

## Exercice 3 71

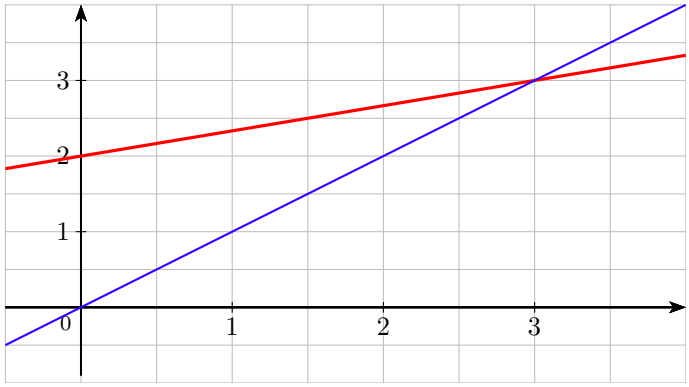
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

**1.** Représenter ci-dessous les termes $u_1$, $u_2$ et $u_3$ sur l'axe des abscisses.

**2.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 3$.

**3.** En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$.

**4.** Déterminer cette limite $\ell$.



## Exercice 4 72

Etudier la convexité de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.

## Exercice 5 72 73

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $f'$ sa fonction dérivée et $f''$ sa fonction dérivée seconde.

**1.** Montrer que $f'(x) = (x-4)(x-2)$.

**2.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

**3.** **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$.

**b.** À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à $10^{-2}$ près de la solution $\alpha$.

**4.** Calculer $f''(x)$.

**5.** **a.** Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction $f$ est convexe ou concave.

**b.** La courbe représentative de la fonction $f$ admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, calculer ses coordonnées.

## Exercice 6 73

$f$ est la fonction définie sur $[-5\ ;\ 10]$ dont le tableau de variations est :

| $x$ | $-5$ | | $-4$ | | $3$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $1$ |

**1.** Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-5\ ;\ 10]$.

**2.** Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $[-5\ ;\ 10]$.

## Exercice 7 73

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x - 10$.

**1.** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$

**2.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

**3.** Avec la calculatrice, déterminer la valeur approchée au centième de $\alpha$.