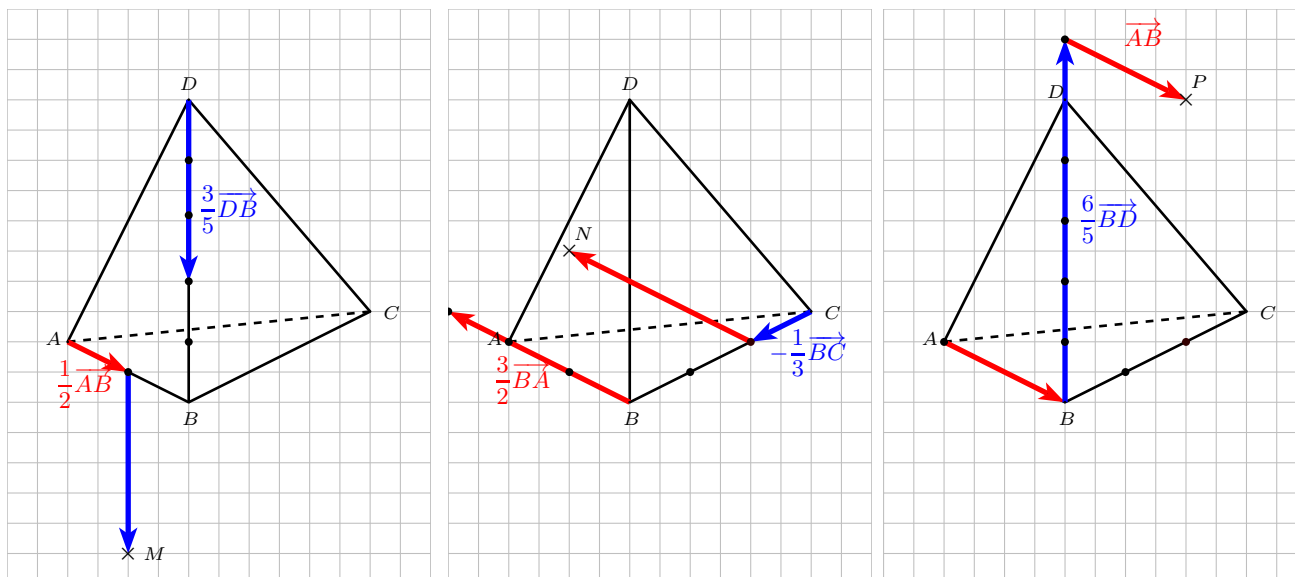


MATHEMATIQUES

Vecteurs, droites et plans de l'espace : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1



Exercice 2

1. A l'aide des graduations, on trouve : $\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC} + \frac{1}{4}\vec{BD}$.

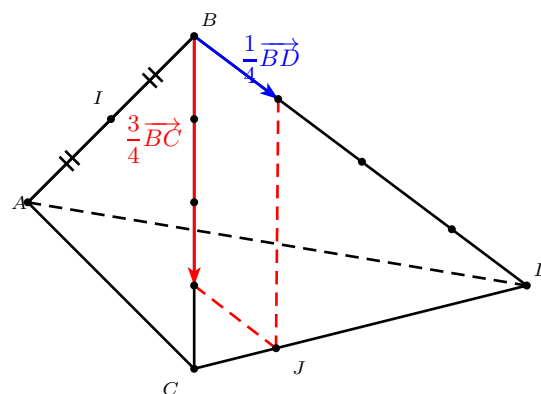
2. I est le milieu de $[AB]$, donc $\vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

3. On a : $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BJ}$ grâce à la relation de Chasles.

$$\text{Ainsi, } \vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\underbrace{\vec{BC}}_{=\vec{BA}+\vec{AC}} + \frac{1}{4}\underbrace{\vec{BD}}_{=\vec{BA}+\vec{AD}}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\vec{IJ} &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}(\vec{BA} + \vec{AC}) + \frac{1}{4}(\vec{BA} + \vec{AD}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AD}.\end{aligned}$$



Comment faire ?

On cherche à exprimer $\vec{IJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.

On "casse" les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BD}$ avec le point A et le tour est joué..

Exercice 3

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BG}$.

Or, $\overrightarrow{JB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BI}$.

Alors, $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + 2\overrightarrow{BI}$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{JG}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont bien coplanaires.

Vecteurs coplanaires

Pour montrer que trois vecteurs sont coplanaires, on exprime l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres. En d'autres termes, on cherche (par exemple) a et b tels que $\overrightarrow{JG} = a\overrightarrow{HF} + b\overrightarrow{BI}$ sachant que $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{BI}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 4

a. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont coplanaires car les points E , F , G et H appartiennent au plan, celui contenant la face $EFGH$ du cube. $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires.

Méthode

Trouver des vecteurs égaux avec des points qui sont dans le même plan.

b. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ mais les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires car $D \notin (ABE)$. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont donc pas coplanaires.

Exercice 5

1. a. $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

b. $\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.

Donc que les droites (AI) et (MG) sont parallèles.

Réflexe

Pour montrer que les droites (AI) et (MG) sont parallèles, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MG} = k \times \overrightarrow{AI}$.

2. a. Démonstrations des égalités vectorielles.

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \overbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}}^{\overrightarrow{BG}} + \overbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}}^{\overrightarrow{CG}} + \overbrace{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG}}^{\overrightarrow{DG}} &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JG} &= \overbrace{\overrightarrow{JA}}^{\overrightarrow{JA}} + \overrightarrow{AG}; \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JG} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

Comment faire ?

On cherche à exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

On utilise l'égalité $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$ en cassant chaque vecteur avec le point A .

b. Démonstration de l'égalité vectorielle.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JE} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AE} \\ &= -\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\text{c. } \overrightarrow{JG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \left(\underbrace{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{JE}} \right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{JE} \quad .$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{JE}$ sont colinéaires car il existe un réel k tel que $\overrightarrow{JG} = k\overrightarrow{JE}$.
Donc que les points J , G et E sont alignés.

Exercice 6

1. a. Expression des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DJ} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

$$\text{De même } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

b. Dédution de l'égalité.

$$\begin{aligned}-\overrightarrow{DJ} + 3\overrightarrow{DK} &= -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) \\ &= \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{DF}\end{aligned}$$

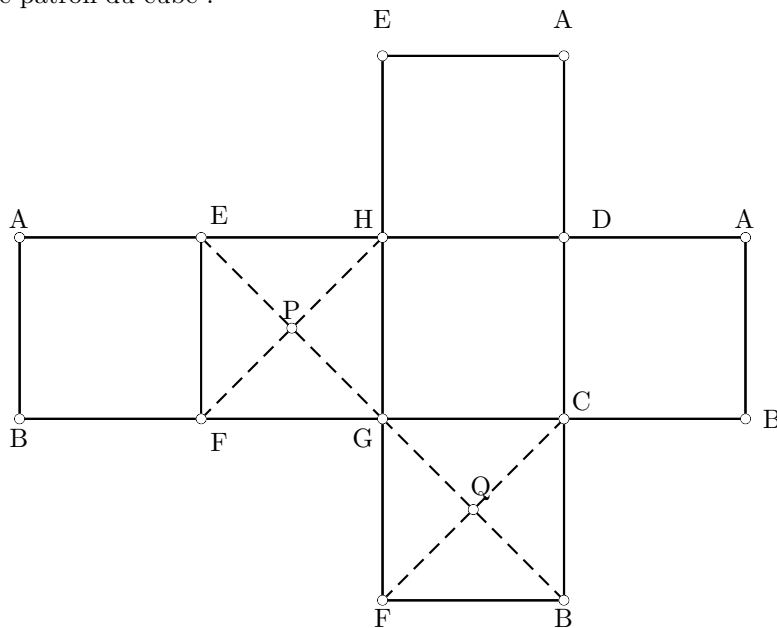
2. Les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ ne sont pas colinéaires car les points D , J et K ne sont pas alignés.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont coplanaires car il existe deux réels $\alpha = -1$ et $\beta = 3$ tels que $\overrightarrow{DF} = \alpha\overrightarrow{DJ} + \beta\overrightarrow{DK}$ et les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les points D , J , K et F appartiennent au même plan.

Exercice 7

1. Un exemple de patron du cube :



2. EG est la diagonale d'un carré de côté 2 cm donc : $EG = 2\sqrt{2}$ cm.
 $EP = \frac{1}{2}EG$ d'où : $EP = \sqrt{2}$ cm.

Ou avec Pythagore

La diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$. Pour obtenir ce résultat, on peut utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle EGF rectangle en F .

3. Le triangle AEP est rectangle en E .

4. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle AEP rectangle en E , on a :
 $AP^2 = AE^2 + EP^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 + 2 = 6$ donc : $AP = \sqrt{6}$ cm.

5. Dans le triangle équilatéral BEG , on a :
 P milieu de $[EG]$, Q milieu de $[BG]$ donc, d'après le théorème des milieux : $PQ = \frac{1}{2}EB$.
 De plus, EB est la diagonale d'un carré de côté 2 cm donc :
 $EB = 2\sqrt{2}$ et $PQ = \sqrt{2}$ cm.

Triangle BEG

Le triangle BEG est équilatéral car ses trois côtés ont la même longueur (diagonales de carrés de même dimension).

6. Le solide $GEBF$ est une pyramide à 4 côtés à base triangulaire d'où : $GEBF$ est un tétraèdre.

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\text{aire du triangle } EBF \times FG}{3}.$$

$$\text{Or, l'aire du triangle } EBF \text{ vaut : } \frac{EF \times FB}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ cm}^2.$$

$$\text{D'où : } V = \frac{2 \times 2}{3} \text{ cm}^3. \text{ Soit } \boxed{V = \frac{4}{3} \text{ cm}^3}.$$