MATHEMATIQUES

Vecteurs, droites et plans de l'espace : entraînement savoir-faire 3 (corrigé)

Exercice 1

On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BH}$ et on considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Dans ce repère, les vecteurs ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Base de l'espace

Une base de l'espace est un triplet de vecteurs non coplanaire.
Pour justifier que les trois vecteurs ne sont pas coplanaires, on montre que les réels a et b vérifiant $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BH}$ n'existent pas.

Ainsi l'égalité vectorielle $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BH}$ se traduit par les coordonnées : $\begin{cases} 0 = a - b \\ 0 = b \\ 1 = b \end{cases}$. Donc ce système n'a pas de solution et les réels a et b n'existent pas. Donc le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CG})$ est bien une base de l'espace.

Exercice 2

1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4-(-2)\\4-8\\5-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix}$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont : $\begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\\z_C - z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-(-2)\\4-8\\-3-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-12\end{pmatrix}$.

Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. On a $I\left(\frac{-2-4}{2}; \frac{8+4}{2}; \frac{9+5}{2}\right)$ soit $I(-3\ ;\ 6\ ;\ 7)$ et $J\left(\frac{0-8}{2}; \frac{4+6}{2}; \frac{-3+7}{2}\right)$ soit $J(-4\ ;\ 5\ ;\ 2)$.

3. En notant $(x_L; y_L; z_L)$ les coordonnées du point L, on obtient $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}x_L+4\\y_L-4\\z_L-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-(-4)\\4-4\\-3-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$.

Par conséquent $\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$.

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ se traduit donc sur les coordonnées par :

$$\begin{cases} x_L + 4 = 1 \\ y_L - 4 = 0 \\ z_L - 5 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_L = -3 \\ y_L = 4 \\ z_L = 3 \end{cases}$$

Donc $L(-3\ ;\ 4\ ;\ -3)$.

4. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-4+3\\5-6\\2-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}1+3\\-2-6\\3-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-8\\-4\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}-3+3\\4-6\\3-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix}$

Méthode

Pour montrer que les points I, J, L et E sont coplanaires, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.

Pour montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires il faut déterminer les réels a et b tels que : $\overrightarrow{IJ}=a\overrightarrow{IE}+b\overrightarrow{IL}$.

Cette égalité se traduit par les coordonnées :

$$\begin{cases}-1=4a+0b\\-1=-8a-2b\\-5=-4a-4b\end{cases}\iff\begin{cases}a=-\dfrac{1}{4}\\b=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

On en déduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{IJ}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{IE}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{IL}$ ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires et par suite que les points I, J, E et L sont coplanaires.

Exercice 3

On commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-5\\3-2\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7-5\\4-2\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\2\\-2\end{pmatrix}$.

On remarque que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont égales au double de celles de $\overrightarrow{AB}$.
On en déduit que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ et donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Les points A, B et C sont donc alignés. En plus, B est le milieu du segment $[AC]$.

Exercice 4

a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4-2\\2-1\\4-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3-2\\3-1\\5-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles car $2\times\dfrac{1}{2}=1$ mais $1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\neq 2$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Par conséquent, ils définissent bien un plan.

Rappel

Trois points non alignés définissent un plan.

b. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-3 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Méthode

Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes, on montre qu'elles ne sont pas parallèles puis qu'elles sont coplanaires.

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles car $1 \times (-3) = -3$ mais $2 \times (-3) = -6 \neq 0$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et, par conséquent, que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

On cherche maintenant à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires en trouvant deux réels α et β tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Méthode

Les droites n'étant pas parallèles, elles sont sont soit non coplanaires, soit sécantes (et donc bien sûr coplanaires).

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-2 \\ 3-1 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

On obtient ainsi le système $\begin{cases} -2 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha + 2\beta \\ 2 = -\alpha \end{cases}$

On trouve $\alpha = -2$ à l'aide de la troisième équation et $\beta = -2 - 2\alpha = -2 - 2 \times (-2) = 2$ à l'aide de la première.

De plus, la deuxième équation est bien vérifiée car $2 = -2 + 2 \times 2$.

Ainsi, on obtient la relation vectorielle $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, ce qui prouve que les points A, B, C et D sont coplanaires et donc que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 5

a. Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, déterminer les coordonnées des points A, B, F, G.

$A(0\,;\,0\,;\,0)$ car l'origine du repère. $B(1\,;\,0\,;\,0)$ car $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$.

$F(1\,;\,0\,;\,1)$ car $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$.

$G(1\,;\,1\,;\,1)$ car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$.

b. I a pour coordonnées $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A + z_B}{2}\right) = (0,5\,;\,0\,;\,0)$

K a pour coordonnées $(1\,;\,0,5\,;\,1)$ donc $\overrightarrow{IK}(0,5\,;\,0,5\,;\,1)$.