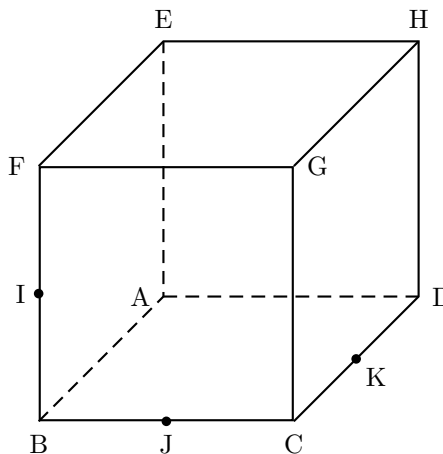


MATHEMATIQUES

Orthogonalité et distances dans l'espace : entraînement

Exercice 1

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de A , G , I , J et K dans ce repère.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) .

On désigne par M un point du segment $[AG]$.

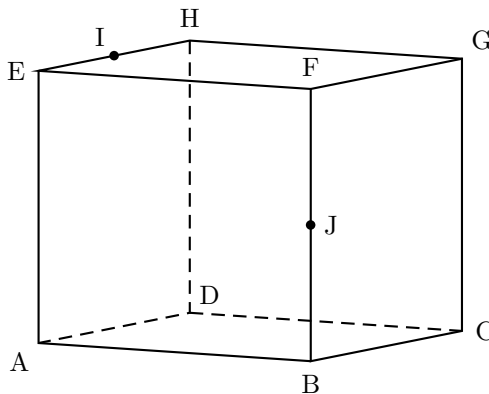
3. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.
4. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.
5. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

[illegible]

Exercice 2

On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner les coordonnées des points I et J .
2.
 - a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI) .
 - b. On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?
3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI .
 - a. En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre $FBIG$ est égal à $\frac{1}{6}$.

On rappelle que :

- le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3}B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.
- la distance d'un point A à un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ est donnée par :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

où H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ et M est un point quelconque du plan $\mathcal{P}$.

- b.** Calculer la distance du point F au plan (BGI) .
- c.** En déduire l'aire du triangle BGI .

A series of horizontal dotted lines for writing.

