MATHEMATIQUES
Orthogonalité et distances dans l'espace : entraînement (corrigé)

Exercice 1

L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, les coordonnées des sommets du cube sont :
$A\,(0\,;0\,;0)$, $B\,(1\,;0\,;0)$, $D\,(0\,;1\,;0)$, $E\,(0\,;0\,;1)$, $C\,(1\,;1\,;0)$, $F\,(1\,;0\,;1)$, $H\,(0\,;1\,;1)$, $G\,(1\,;1\,;1)$.
Le point I est le milieu de $[BF]$ donc I a pour coordonnées $\left(1\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

Le point J est le milieu de $[BC]$ donc J a pour coordonnées $\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$.

Le point K est le milieu de $[CD]$ donc K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;0\right)$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a les mêmes coordonnées que le point G c'est-à-dire $(1\,;1\,;1)$.

- $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(1-1\,;\dfrac{1}{2}-0\,;0-\dfrac{1}{2}\right)=\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.
$\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{IJ}=1\times 0+1\times\dfrac{1}{2}+1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{JK}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}-1\,;1-\dfrac{1}{2}\,;0-0\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$.
$\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{JK}}=1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1\times\dfrac{1}{2}+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{JK}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ ne sont pas colinéaires ; le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc il est normal au plan (IJK).

3. Le point M est sur la droite (AG) donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires et par conséquent il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\times\overrightarrow{AG}$. De plus, M est sur le segment $[AG]$, on en en déduit que $t\in[0\ ;\ 1]$.

4. En notant $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées du point M, puisque A est l'origine du repère, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$. De plus comme G a pour coordonnées $(1\,;1\,;1)$, le vecteur $t\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ t)$ et par suite, on obtient $x=t$, $y=t$ et $z=t$.
Le point M a donc pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ t)$.

On a $IM^2=(t-1)^2+(t-0)^2+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2=t^2-2t+1+t^2+t^2-t+\dfrac{1}{4}=3t^2-3t+\dfrac{5}{4}$

5. Le trinôme ax^2+bx+c avec $a>0$ est minimal pour $x=-\dfrac{b}{2a}$, donc $3t^2-3t+\dfrac{5}{4}$ est minimal pour $t=-\dfrac{-3}{2\times 3}$ donc pour $t=\dfrac{1}{2}$.

MI^2 donc MI est minimal pour $t=\dfrac{1}{2}$; cela correspond au point M_m de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 2

Les coordonnées des sommets du cube sont $A(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $D(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $E(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $F(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $G(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $H(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

1. I, milieu de $[EH]$, a pour coordonnées $I\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$. et J, milieu de $[FB]$, a pour coordonnées $I\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

2. a. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0 + (-2)\times 1 + 2\times 1 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{BG}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI} = 1\times(-1) + (-2)\times\frac{1}{2} + 2\times 1 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{BI}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI). Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BGI) donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

b. Le point K, milieu du segment $[HJ]$, a pour coordonnées $K\left(\frac{0+1}{2}\ ;\ \frac{1+0}{2}\ ;\ \frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)$ soit $K\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$.

Le point K appartient au plan (BGI) si et seulement si il existe deux réels a et b tels que :

Caractérisation des points d'un plan

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ où x et y sont des nombre réels.

$$\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BG} + b\overrightarrow{BI}$$

Le vecteur $\overrightarrow{BK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\3/4\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1\end{pmatrix}$, l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BG} + b\overrightarrow{BI}$ se traduit sur le système par :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = a\times 0 - b \\ \frac{1}{2} = a + \frac{1}{2}b \\ \frac{3}{4} = a + b \end{cases}$$

Ce système a pour solution $a = \frac{1}{4}$; $b = \frac{1}{2}$.

On en déduit que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BI}$.

Par conséquent le pont K est bien dans le plan (BGI).

Remarque

On dit que $\overrightarrow{BK}$ s'écrit comme combinaison de deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI).

Autre méthode

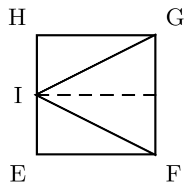
Pour montrer que K est un point de (BGI) on montre que les vecteurs $\vec{n}$ (vecteur normal de (BGI)) et $\overrightarrow{BK}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times(-2) + \frac{3}{4}\times 2 = 0.$

Donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{BK}$ et par suite $K\in(BGI)$.

3. **a.** Le triangle FIG est isocèle de sommet principal I. Sa hauteur issue de I vaut 1 et sa base FG vaut 1.

Donc son aire est égale à $\dfrac{1\times 1}{2}=\dfrac{1}{2}$.



Le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $FBIG$ est donc $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}\,(\text{aire de } FIG)\times BF=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{6}$.

b. En utilisant la formule fournie dans l'énoncé, la distance du point F au plan (BGI) en prenant le point G du plan (BGI) comme point M, on a :

$$FH=\frac{|\overrightarrow{FG}\cdot\vec{n}|}{||\vec{n}||}$$

Comme $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FG}\cdot\vec{n}=0\times 1+1\times(-2)+0\times 2=-2$ et $||\vec{n}||=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$

Ainsi, $FH=\dfrac{|-2|}{3}=\dfrac{2}{3}$.

c. En prenant comme base le triangle BGI pour calculer le volume du tétraèdre $FIBG$ est donné par :

$$\frac{1}{3}\text{aire}(BIG)\times FH=\frac{1}{3}\text{aire}(BIG)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\text{aire}(BIG)$$

Comme d'après la question précédente le volume du tétraèdre vaut $\dfrac{1}{6}$ on obtient l'égalité :

$$\frac{2}{9}\text{aire}(BIG)=\frac{1}{6}$$

On trouve alors :

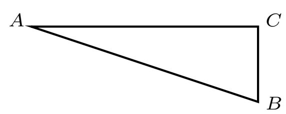
$$\text{aire}(BIG)=\frac{1}{6}\times\frac{9}{2}=\frac{3}{4}$$

Exercice 3

1. **a.** Pour $t=0$ on a $S_1(0)(140\ ;\ 105\ ;\ -170)$.

b. On sait que les sous-marins se déplacent à vitesse constante. Le premier sous-marin a parcouru la distance AB avec $A=S_1(0)$ et $B=S_1(1)$ en une minute.
$A(140\ ;\ 105\ ;\ -170)$ et $B(80\ ;\ 15\ ;\ -200)$
donc $AB=\sqrt{60^2+90^2+30^2}=\sqrt{12600}=30\sqrt{14}$.
La vitesse du premier sous-marin est donc de $30\sqrt{14}$ mètres par minutes soit $1,8\sqrt{14}\approx 6,73$ km.h^{-1}.

c. On considère les points A et B définis précédemment
Soit C le point de l'espace à la verticale de B et ayant la même profondeur que A



Ainsi (ABC) est le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.
Appelons B le point atteint par le sous-marin au bout d'une minute : $B(80\ ;\ 15\ ;\ -200)$.
D'après la définition de la vitesse, celle-ci $30\sqrt{14}$ est égale à la distance AB.
C a la même abscisse et la même ordonnée que B, mais la cote de A : C$(80\ ;\ 15\ ;\ -170)$.
On a donc dans le triangle rectangle ABC : $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{30}{30\sqrt{14}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.
La calculatrice donne au dixième près : $\alpha \approx 15,5$degres.

2. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ;\ -68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\ ;\ -405\ ;\ -248)$ avec une vitesse constante.

Les coordonnées de S_2 sont $\begin{cases} x_2(t) = x_2(0) + at \\ y_2(t) = y_2(0) + bt \\ z_2(t) = z_2(0) + ct \end{cases}$ où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont les coordonnées (constantes) du vecteur vitesse.

Au bout de trois minutes, on a : $\begin{cases} x_2(3) = x_2(0) + 3a = 68 + 3a = -202 \\ y_2(3) = y_2(0) + 3b = 135 + 3b = -405 \\ z_2(3) = z_2(0) + 3c = -68 + 3c = -248 \end{cases}$.

On en déduit : $\begin{cases} a = -90 \\ b = -180 \\ c = -60 \end{cases}$ donc $S_2(t) \begin{cases} x_2(t) = 69 - 90t \\ y_2(t) = 135 - 180t \\ z_2(t) = 68 - 60t \end{cases}$.

Les deux sous-marins ont à la même profondeur si $z_1(t) = z_2(t)$ donc si :

$$-170 - 30t = -68 - 60t \iff 30t = 102 \iff t = 3,4 \text{ min}$$