MATHEMATIQUES
Orthogonalité et distances dans l'espace : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1

Méthode

La difficulté relative de cet exercice réside dans le choix de la formule qu'il faut choisir pour calculer un produit scalaire. A chaque situation son produit scalaire !

1. $ABCD$ est un carré, donc ABC est un triangle rectangle isocèle en B, d'où $\widehat{ABC} = 45°$.
D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ soit $AC^2 = 2^2 + 2^2$, donc $AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{ABC}) = 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos(45°) = 4\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$$

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ car B est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}||^2 = AB^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AGB rectangle, $AB^2 = AG^2 + GB^2 = 3^2 + 3^2 = 18$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18$$

3.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\underbrace{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}_{=\overrightarrow{CB}}||^2) \\
&= \frac{1}{2}(||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{CB}||^2) \quad \text{Relation de Chasles} \\
&= \frac{1}{2}(4^2 + 3^2 - 6^2) \\
&= -5,5
\end{aligned}$$

Formule de polarisation

La formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ se retrouve à partir du développement de $(\vec{u} - \vec{v})^2$. Essayez !

Exercice 2

1. Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a :
A$(0\,;0\,;0)$, B$(1\,;0\,;0)$, C$(1\,;1\,;0)$, D$(0\,;1\,;0)$, E$(0\,;0\,;1)$ et G$(1\,;1\,;1)$.
On détermine alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CE}$:
$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} = 1 \times (-1) + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1$.
On détermine de même les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{BD}$:
$\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 \times (-1) + (-1) \times 1 + (-1) \times 0 = 0$.

2. a. Le point E est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BE) car les droites (BE) et (HE) sont perpendiculaires.

Ainsi, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BE} = BE^2 = 2$.

A savoir en Terminale

$[BE]$ est la diagonale d'un carré de côté 1, donc $BE = \sqrt{2}$. D'une manière générale, la diagonale d'un carré de côté a est $a\sqrt{2}$. Autrement on retrouve ce résultat avec le théorème de Pythagore.

b. On a $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BH} = BE \times BH \times \cos\left(\widehat{EBH}\right)$.

BH se calcule dans le triangle FHB rectangle en F avec le théorème de Pythagore :

$BH^2 = FH^2 + FB^2$ soit $BH^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$.
On en déduit que $BH = \sqrt{3}$.

Ainsi,
$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BH} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \cos\left(\widehat{EBH}\right)$, or $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BH} = 2$ donc :

$$\cos\left(\widehat{EBH}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \text{d'où} \quad \widehat{EBH} \simeq 35^\circ$$

Exercice 3

a. Les droites (AD) et (HD) sont perpendiculaires car ADHE est un carré.

b. Les droites (AD) et (CG) sont orthogonales d'après la question précédente car les droites (HD) et (CG) sont parallèles mais ne sont pas perpendiculaires car elles ne sont pas coplanaires. (C $\notin$ (ADG)).

Exercice 4

a. La droite (GC) est perpendiculaire à (BC) car GCGF est un carré.
De même, la droite (GC) est perpendiculaire à (CD) car GCDH est un carré.
On en déduit que la droite (GC) est orthogonale au plan (ABC) contenant les droites (CD) et (CB) sécantes au point C.

b. La droite (GC) est orthogonale au plan (ABC) donc à toute droite de ce plan, en particulier la droite (AC).
On en déduit que le triangle AGC est triangle en C.
Pour déterminer la longueur du segment [AC], on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B :

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{2}$$

Pour déterminer la longueur du segment [AG], on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle AGC rectangle en C :

$$\mathrm{AG}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{GC}^2 \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AG} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{GC}^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Exercice 5

1. a. $(OH) \perp (ABC)$, donc (OH) est orthogonale à toute droite du plan (ABC), donc à (BC).

b. (OA) est orthogonale à deux droites sécantes (OB) et (OC) du plan (OBC), donc (OA) est orthogonale à tout le plan (OBC), donc en particulier à la droite (BC).

2. a. $(OH) \perp (BC)$ et $(OA) \perp (BC)$, donc (BC) est ortho- gonale à tout le plan (OAH) ((OA) et (OH) sont dans le plan (OAH)), donc, en particulier, à la droite (AH).

b. $(OH) \perp (AC)$ (même principe que **1. a.**) et $(OB) \perp (AC)$ (même principe que **1. b.**), donc (AC) est orthogonale à tout le plan (OBH), donc en particulier à la droite (BH).

3. On vient de prouver que (AH) et (BC) sont orthogonales et que (BH) et (AH) le sont aussi. Ainsi, le point H est à l'intersection de deux hauteurs dans le triangle ABC, H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 6

On montre que le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ est nul :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Tétraèdre régulier

Les triangles qui le composent sont des triangles équilatéraux de côté 1. Les angles dans de tels triangles valent tous $\dfrac{\pi}{3}$.

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc orthogonaux.