MATHEMATIQUES
Orthogonalité et distances dans l'espace : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

Le cours

Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathscr{P}$ lorsqu'il est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.

Les faces $ABFE$ et $BCGF$ étant des carrés, le vecteur $\overrightarrow{FB}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Ainsi, $\overrightarrow{FB}$ est un vecteur normal au plan (ABC). On peut aussi dire que la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc on peut définir le plan $(\mathscr{P})$ engendré par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

De plus, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = -3\times 1 + (-1)\times(-1) + 1\times 2 = 0$.

et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v} = -3\times 0 + (-1)\times(-1) + 1\times(-1) = 0$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$.

Exercice 3

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\3-2\\1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\0-2\\-2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

Méthode

Pour démontrer que trois points définissent un plan, on prouve que ces points ne sont pas alignés.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car les triplets $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels.

Les points A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent bien un plan.

2. Soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal au plan (ABC).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Or on cherche un vecteur $\vec{n}$ tel que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

$$\begin{cases} -2a+b+3c &= 0\\ a-2b &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 2b\\ -2a+b+3c &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 2b\\ -4b+b+3c &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 2b\\ -3b+3c &= 0\end{cases}$$

Donc $\begin{cases} a &= 2b \\ c &= b \end{cases}$

Donc $a = 2b = 2c$.

En posant $c = 1$, on obtient $b = 1$ et $a = 2$.

Ainsi on a $\vec{n}(2;1;1)$.

Méthode

Deux équations pour trois inconnues : on fixe une inconnue (ici b et on exprime les deux autres a et c en fonction de b. Ce système a une infinité de solution. En choisissant $c = 2$, on obtient un autre triplet possible.

Exercice 4

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$. Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, on en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés et donc que les points A, B et C définissent un plan.

2. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

Donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Parallélogramme/rectangle

Pour montrer qu'un quadrilatère est un rectangle, on commence par montrer que c'est un parallélogramme, puis on montre que ce parallélogramme a un angle droit.
N'oubliez pas : $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Comme $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -1\times(-1) + 3\times(-1) + 1\times 2 = 0$. On en déduit que les vecteurs sont orthogonaux et par suite que $ABCD$ est un rectangle.

3. a. $\overrightarrow{SM}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{SH}\cdot\vec{n}$ car H est le projeté orthogonal de M sur (SH).

$$\overrightarrow{SH}\cdot\vec{n} = \begin{cases} SH\times||\vec{n}|| \text{ si } \overrightarrow{SH} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires de même sens} \\ -SH\times||\vec{n}|| \text{ si } \overrightarrow{SH} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires de sens contraire} \end{cases}$$

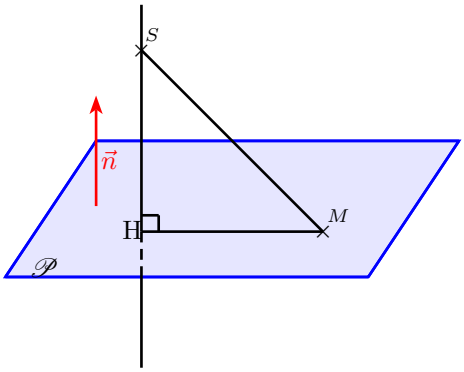
Rappel ?

Valeur absolue de truc est égal à + ou − truc.
En mathématiques, cela donne :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

on a donc : $|\overrightarrow{SH}\cdot\vec{n}| = SH\times||\vec{n}||$. Ainsi,

$$SH = \frac{|\overrightarrow{SM}\cdot\vec{n}|}{||\vec{n}||}$$



b. • $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 7 \times (-1) + 1 \times 3 + 4 \times 1 = 0$
• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 7 \times (-2) + 1 \times 2 + 4 \times 3 = 0$.
On en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

Vecteur normal : méthode

$\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan (ABC).

Norme d'un vecteur

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

c. $||\vec{n}|| = \sqrt{7^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{66}$

On a $\overrightarrow{SA} \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1,5 \\ -6 \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{SA} \cdot \vec{n} = -1,5 \times 7 + 1,5 \times 1 + (-6) \times 4 = -33$.

Par conséquent : $SH = \dfrac{|\overrightarrow{SA} \cdot \vec{n}|}{||\vec{n}||} = \underbrace{\dfrac{|-33|}{\sqrt{66}} = \dfrac{\sqrt{66}}{2}}_{\text{passage technique :-)}}$.

Remarque qui a son importance

On a choisi $M = A$ dans la formule. On pouvait choisir $M = B$ ou $M = C$.... même résultat évidemment.

d. On a $AB = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$ et $BC = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.
Comme $ABCD$ est un rectangle $\mathscr{A}_{ABCD} = AB \times BC = \sqrt{11} \times \sqrt{6} = \sqrt{66}$.
Le volume de la pyramide est donc donnée par :

$$\mathscr{V}_{SABCD} = \frac{\mathscr{A}_{ABCD} \times SH}{3} = \frac{\sqrt{66} \times \sqrt{66}}{3 \times 2} = \frac{66}{6} = 11$$

Volume d'une pyramide

$\frac{1}{3}\times$ Aire de la base $\times$ hauteur.