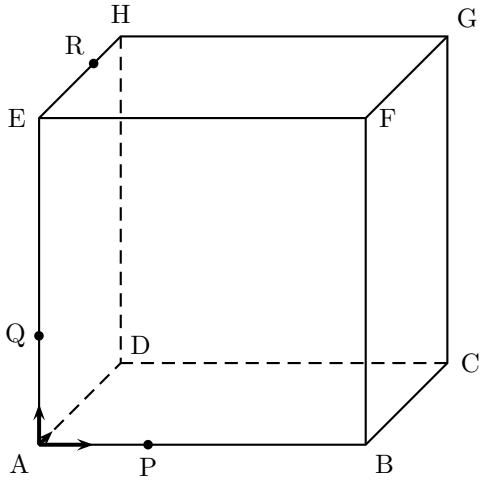
MATHEMATIQUES
Représentations paramétriques et équations cartésiennes : entraînement 1

Exercice 1



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{\mathrm{k}}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6\ ;\ 0\ ;\ 0), F(6\ ;\ 0\ ;\ 6) \text{ et } \ R(0\ ;\ 4\ ;\ 6).$$

1. a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ soit un vecteur normal au plan (PQR) .

c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.

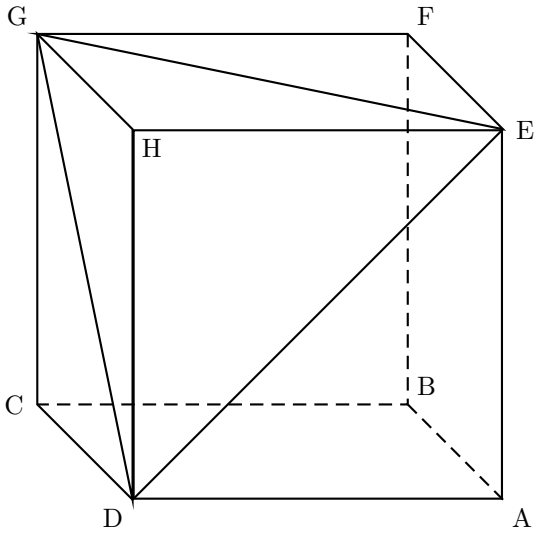
2. On note I le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

a. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire au plan (PQR) passant par Ω.

b. En déduire les coordonnées du point I.

Exercice 2

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.



On se place dans le repère orthonormé $\left(B\ ;\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BF}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).

2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).

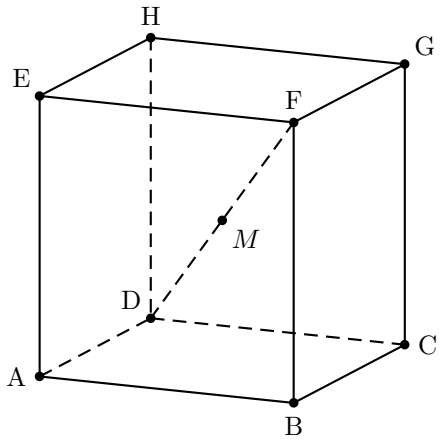
4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.

5. Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\ ;\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DH}\right)$.



Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

2. **a.** Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\ ;\ x\ ;\ x)$.

b. Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}.$$

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b. l'angle θ est-il maximal ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....