MATHEMATIQUES
Représentations paramétriques et équations cartésiennes : entraînement 2

Exercice 1

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.
On considère les points $B(10\ ;\ -8\ ;\ 2)$, $C(-1\ ;\ -8\ ;\ 5)$ et $D(14\ ;\ 4\ ;\ 8)$.

1. a. Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

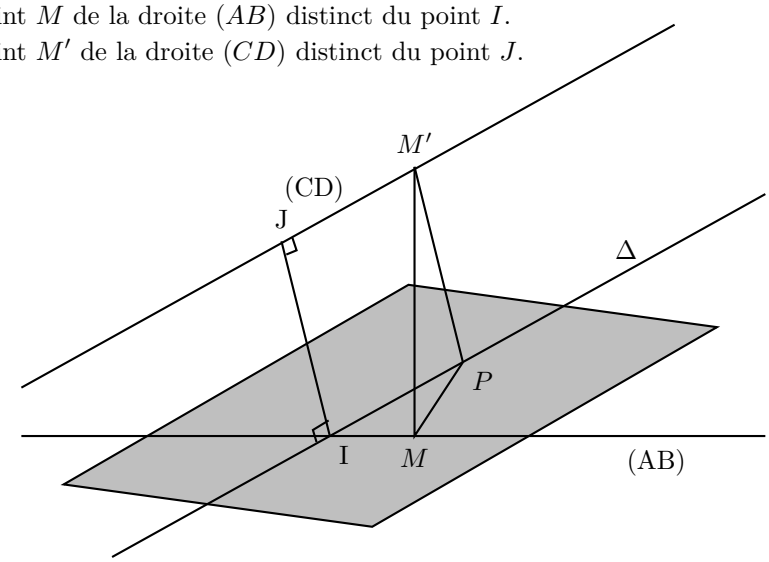
b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

a. Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

b. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).
Sur le schéma ci -dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I.
On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I.
On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J.



a. Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

b. Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P.

c. Justifier que $MM' > IJ$ et conclure.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{\mathrm{k}}\right)$.
On considère les points $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$ et $C(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.

a. Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.

b. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

c. Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x &= 2t \\ y &= -4t - 3, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= t \end{cases}$$

Démontrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 3

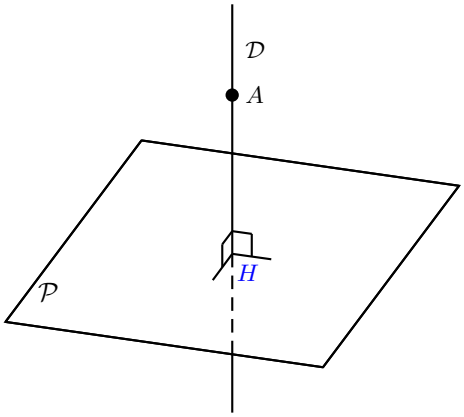
L'espace est mini d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{\mathrm{k}}\right)$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$.
On note A le point de coordonnées $\left(1\ ;\ a\ ;\ a^2\right)$ où a est un nombre réel.

1. Justifier que, quelle que soit la valeur de a, le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ (de paramètre t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

b. Soit M un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente.
Exprimer la distance AM en fonction du réel t.

On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par le point A. Le point H est appelé projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathcal{P}$.



3. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $\left(1\ ;\ a\ ;\ a^2\right)$ au plan $\mathcal{P}$ est minimale ? Justifier la réponse.