MATHEMATIQUES
Bilan sur l'espace : QCM 23 (corrigé)

Exercice 1

1. Dans le repère orthonormé, $\left(A\ ;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$B(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $I(1\ ;\ 2\ ;\ 2)$ et $J(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (BIJ).

Rappel

Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan alors c'est un vecteur normal à ce plan.

On a $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BIJ) si et seulement si :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI} = 0 \text{ et } \vec{n}\cdot\overrightarrow{BJ} = 0$$

On obtient donc les équations $-a+2b+2c=0$ et $-2a+b+c=0$.

Produit scalaire et coordonnées

Dans un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$.

Réponse : a.

2. Déterminer un vecteur normal au plan (BIJ) revient à résoudre le système $\begin{cases} -a+2b+2c=0 \\ -2a+b+c=0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} -a+2b+2c=0 \\ -2a+b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2b+2c \\ -2(2b+2c)+b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2b+2c \\ b=-c \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=-c \end{cases}.$$

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à (BIJ) sont de la forme $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{pmatrix}$

Pensez-y !

Il y a une infinité de vecteurs normaux à un plan.

- En prenant $c=-\sqrt{2}$, on obtient $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
- En prenant $c=2$, on obtient $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- En prenant $c=-4$, on obtient $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Réponse : a. b. et c.

3.

Méthode

Dans le cas où le plan (P) est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

- Ecrire l'équation cartésienne de (P) sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d est à déterminer.
- Déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Une équation cartésienne d'un plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal.

Comme $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (BIJ), une équation cartésienne de (BIJ) est de la forme :

$$-2y + 2z + d = 0$$

Le point B de coordonnées $(1 \,;\, 0 \,;\, 0)$ est un point de ce plan, ainsi ses coordonnées vérifient l'équation :

$-2y_B + 2z_B + d = 0$ soit $-0 + 0 + d = 0$ d'où $d = 0$.

Une équation cartésienne du plan (BIJ) est $-2y - 2z = 0$ soit (en divisant par 2) : $-y + z = 0$.

Autrement mais moins joli

On teste si les coordonnées des points B, I et J vérifient chacune des équations proposées.

Réponse : c.

4.

Le cours

- Un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan (P) s'il est non nul et orthogonal à tous les vecteurs contenus dans (P).
- Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan, alors c'est un vecteur normal à ce plan.

Dans le repère orthonormé, $\left(A \,;\, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \,,\, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \,,\, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$E(0 \,;\, 0 \,;\, 2)$, $K(2 \,;\, 1 \,;\, 0)$ et $I(1 \,;\, 2 \,;\, 2)$.

Ainsi $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs sont deux vecteurs non colinéaires du plan (EKI).

- On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EK} = 4 \times 2 + (-2) \times 1 + (-3) \times (-2) \neq 0$.

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur normal de (EKI).

- On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EK} = 4 \times 2 + (-2) \times 1 + 3 \times (-2) = 0$.

Et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EI} = 4 \times 1 + (-2) \times 2 + 3 \times 0 = 0$.

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (EKI).

- On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EK} = 4 \times 2 + 2 \times 1 + (-3) \times (-2) \neq 0$.

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur normal de (EKI).

Réponse : b.

5. $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (EKI), donc une équation cartésienne de (EKI) est $4x - 2y + 3z + d = 0$.

Déjà fait

Voir la méthode dans l'exercice 58.

En prenant le point E de coordonnées $(0\ ;\ 0;\ 2)$, on trouve $d = -6$.

D'où $EKI\ :\ 4x - 2y + 3z - 6 = 0$.

Réponse : a.

6.

Méthode : intersection de deux plans

Pour déterminer l'intersection de deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$:

- on teste le parallélisme de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ en testant la colinéarité des vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$;
- si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles, alors ils sont sécants suivant une droite d dont on déterminera une représentation paramétrique en résolvant le système composé des équations de $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$.

Un vecteur normal de (BIJ) est $\vec{n_1}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal de (EKI) est $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles), on en déduit que les plans se coupent suivant une droite.

Un point M appartient à cette droite si et seulement si ses coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient le système :

Pour résoudre un tel système (2 équations avec 3 in
et on exprime les deux autres en fonction de celle-ci

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ 4x - 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z \\ 4x - 2z + 3z - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = -\dfrac{1}{4}z + \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

En posant $z = k$, on obtient : $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}k + \dfrac{3}{2} \\ y = k \\ z = k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

Ce système est une représentation paramétrique de la droite d d'intersection des plans (BIJ) et (EKI).
En posant $k = 6 - 4t$, on obtient :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}(6-4t)+\dfrac{3}{2} \\ y = 6-4t \\ z = 6-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ soit } \begin{cases} x = t \\ y = 6-4t \\ z = 6-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Réponse : b.

Exercice 2

1. Dans le repère orthonormé, $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$B(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $G(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $E(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

Ainsi $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.
Ces deux vecteurs sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BEG).

- On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG} = (-1)\times 0 + 1\times 1 + (-1)\times 1 = 0$.

Et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE} = (-1)\times(-1) + 1\times 0 + (-1)\times 1 = 0$.

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (BGE).

- On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0$.

Et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE} = 1\times(-1) + (-1)\times 0 + 1\times 1 = 0$.

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (BGE).

- On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0 + 1\times 1 + 0\times 1 \neq 0$.

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur normal de (BGE).

Réponse : a. et b.

2.

Méthode : intersection d'une droite et d'un plan

Pour déterminer l'intersection d'une droite d et d'un plan $\mathscr{P}$:

- on teste le parallélisme de d et de $\mathscr{P}$ en étudiant l'orthogonalité d'un vecteur directeur de d et d'un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
- si d et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles, alors ils se coupent en un point M dont les coordonnées se calculent en résolvant le système composé des équations de d et de $\mathscr{P}$.

Un vecteur directeur de (FD) est le vecteur $\overrightarrow{FD}$.

Comme $F(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $D(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, alors $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Un vecteur normal de (BGE) est $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas orthogonaux car $\vec{n}\cdot\overrightarrow{FD} = 3 \neq 0$, donc (FD) et (BGE) se coupe en un point M.

- On détermine une équation paramétrique de (FD) :

En prenant le point D et le vecteur $\overrightarrow{FD}$, on obtient :
$\begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

- On détermine une équation cartésienne de (BGE) en prenant comme vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et le point B

(pour déterminer d). On obtient :

$$-x+y-z+1=0$$

Par conséquent, (FD) et (BGE) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = -t \\ -x+y-z+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = -t \\ -x+y-z+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = -t \\ t+1+t+t+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{2}{3} \\ t = -\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Réponse : b.

3. On a $BG = BE = GE$ donc le triangle BGE est équilatéral.

Réponse : c.

4. Le côté du triangle équilatéral BGE vaut $\sqrt{2}$.

Sa hauteur est $\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, son aire est $\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

A savoir

- La diagonale d'un carré de côté a est $a\sqrt{2}$. On peut connaître ce résultat en TS. Autrement, on le retrouve avec Pythagore.
- La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Même remarque qu'au dessus.
- Pour l'aire d'un triangle, j'en parle même pas !

Réponse : a.

5. Le volume du tétraèdre est donnée par $\dfrac{1}{3}\times$ Aire de la base $\times$ hauteur.

La base est le triangle BGE dont on a l'aire : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
La hauteur est FU avec U point d'intersection entre la droite (FD) et le plan (BGE).
En effet, on a vu qu'un vecteur normal du plan (BGE) est colinéaire à un vecteur directeur de (FD). On avait $\vec{n} = \overrightarrow{FD}$. Cela signifie que la droite (FD) est orthogonale au plan (BEG).

Ainsi la hauteur est donnée par DU avec $D(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $U\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

$DU = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ainsi, le volume du tétraèdre est donné par $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$.

Réponse : b.