MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : Calculs de dérivées (corrigé)

Exercice 1

1. La fonction $f\ :\ x \longmapsto -xe^x$ est sous la forme d'un produit de deux fonctions $u \times v$.
$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = -x$ et $v(x) = e^x$.
Donc $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

$$f'(x) = \underbrace{-1}_{u'(x)} \times \underbrace{e^x}_{v(x)} + \underbrace{(-x)}_{u(x)} \times \underbrace{e^x}_{v'(x)} = -e^x - xe^x = e^x(-x-1)$$

Conseil
Identifiez la forme de la fonction avant d'en calculer sa dérivée. Ici, c'est un produit.

2. La fonction $g\ :\ x \longmapsto \dfrac{x}{e^x}$ est sous la forme d'un quotient de deux fonctions $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$.

$$g'(x) = \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

Rappels
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
- $(e^x)^2 = e^x \times e^x$.

3. La fonction $h\ :\ x \longmapsto e^{-x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ est sous la forme d'un produit de deux fonctions $u \times v$.
$h(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.
Donc $h'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$, avec $u'(x) = (-1) \times e^{-x}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

$$h'(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{u'(x)} \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{v(x)} + \underbrace{e^{-x}}_{u(x)} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{v'(x)} = -e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Exercice 2

- f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = e^x \neq 0$ pour tout x réel.
  f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{e^x \times (e^x + 1) - (e^x - 1) \times e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x \times (e^x + 1) - (e^x - 1) \times e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x \times [(e^x + 1) - (e^x - 1)]}{(e^x)^2} = \frac{2}{e^x} \end{aligned}$$

- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle de la forme e^u avec u une fonction trinôme dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (6x-4)e^{3x^2-4x+1}$.

- La fonction h est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x^2 - 2x + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-3x+2}$.
  h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\
&= (2x-2)\mathrm{e}^{-3x+2} + (x^2 - 2x + 1) \times (-3)\mathrm{e}^{-3x+2} \\
&= \left[(2x-2) + (x^2 - 2x + 1) \times (-3)\right] \mathrm{e}^{-3x+2} \\
&= (2x - 2 - 3x^2 + 6x - 3)\mathrm{e}^{-3x+2} \\
&= (-3x^2 + 8x - 5)\mathrm{e}^{-3x+2}
\end{aligned}$$