MATHEMATIQUES
Fonctions trigonométriques : sujet entraînement (corrigé)

Exercice 1

1. Résolution de l'équation.

$$\begin{array}{rcl} \cos(x)^2+\cos(x) & = & 0 \\ \cos(x)\left(\cos(x)+1\right) & = & 0 \text{ On factorise pour se ramener à une équation produit nul.} \\ \cos(x)=0 & \text{ou} & \cos(x)=-1 \end{array}$$

- L'équation $\cos(x)=0$ a pour solutions $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ et $-\dfrac{\pi}{2}+2k'\pi$ avec k et k' des entiers relatifs.
On peut rassembler ces solutions en $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

- L'équation $\cos(x)=-1$ a pour solutions $\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc : $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ \pi+2k\pi\right\}$

Voilà

C'est vraiment le genre d'équation qu'il faut savoir résoudre presque sans réfléchir (j'ai dit presque !). Faites un petit cercle trigonométrique dans votre tête pour visualiser les solutions.

Sur $[0\ ;\ 2\pi[$, les solutions sont : $\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}$.
On en déduit graphiquement que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en trois points sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$.

Remarque

La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en trois points sur chaque intervalle d'amplitude 2π.

2. a. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\cos^2(-x)+\cos(-x)=\cos^2(x)+\cos(x)=f(x)$. La fonction est donc paire.

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)^2+\cos(x+2\pi)=\cos(x)^2+\cos(x)=f(x)$. La fonction est donc 2π-périodique.

c. Comme la fonction f est 2π-périodique, on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π (on complétera par translation) : par exemple $[-\pi\ ;\ \pi]$.

De plus f est paire, on peut donc restreindre cet intervalle d'étude à $[0\ ;\ \pi]$ (on complétera par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

3. a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

Pour tout réel x :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -2\sin(x)\cos(x)-\sin(x) \\ & = & \sin(x)\left(-2\cos(x)-1\right) \text{ On factorise pour étudier le signe.} \end{array}$$

Dérivée de u^2

La dérivée de u^2 est $2uu'$.
On peut aussi voir $\cos^2(x)$ comme $\cos(x)\times\cos(x)$ et dériver comme un produit de deux fonction. Essayez !

On commence par étudier le signe de sa fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0 \quad \pi]$:
Pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
-2\cos(x) - 1 \geqslant 0 &\iff -2\cos(x) \geqslant 1\\
&\iff 2\cos(x) \leqslant -1\\
&\iff \cos(x) \leqslant -\frac{1}{2}\\
&\iff x \in \left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]
\end{aligned}$$

Conseil
Trouvez les solutions de ces inéquations avec des cercles trigonométriques.

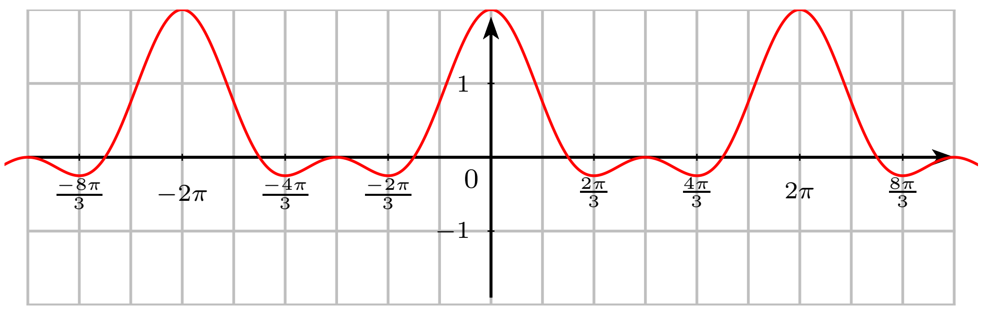
$f(0) = 1^2 + 1 = 2\,;$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}\,;$$

$f(\pi) = (-1)^2 + (-1) = 0$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin(x)$	0		$+$		0
$-2\cos(x) - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

b.



Exercice 2

1. a. $f(x+2\pi) = \sin^2(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin^2 x + \cos x = f(x)$.
On en déduit que f est bien périodique de période 2π.

b. Démontrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe revient à montrer que f est paire.
$f(-x) = (\sin(-x))^2 + \cos(-x) = (-\sin(x))^2 + \cos(x) = \sin^2 x + \cos x = f(x)$.
f est donc paire.

c. Comme la fonction f est 2π-périodique, on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π (on complétera par translation) : par exemple $[-\pi ; \pi]$.

De plus f est paire, on peut donc restreindre cet intervalle d'étude à $[0 ; \pi]$ (on complétera par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

2. f est la somme de deux fonctions dérivables sur $[0 ; \pi]$, donc f est dérivable sur $[0 ; \pi]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) \\ &= \sin(x)\,(2\cos(x) - 1) \end{aligned}$$

On factorise.

Dérivée de u^2

La dérivée de u^2 est $2uu'$.
On peut aussi voir $\sin^2(x)$ comme $\sin(x) \times \sin(x)$ et dériver comme un produit de deux fonction. Je me répète avec l'exercice précédent !

3. Sur $[0 ; \pi]$, $\sin x \geqslant 0$.
$2\cos x - 1 \geqslant 0$ est équivalente à $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Cette inéquation a pour solution $\left[0 ; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

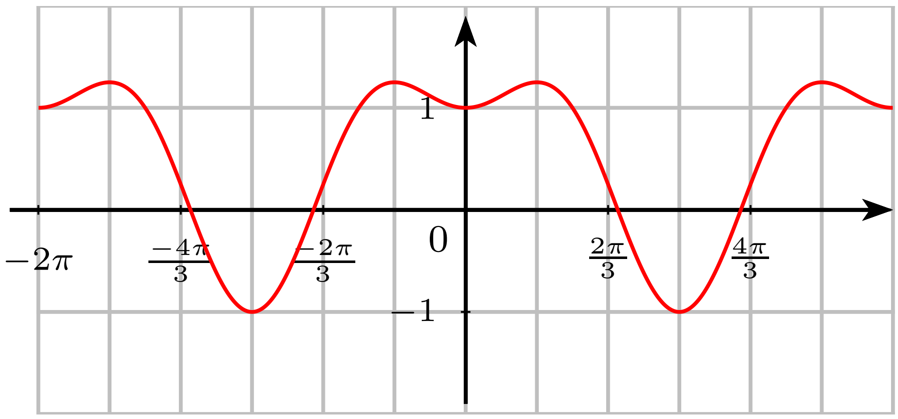
Toujours le même conseil

Faites des cercles trigonométriques pour résoudre ces inéquations.

On en déduit le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		α		π
$\sin(x)$	0		$+$				0
$2\cos(x)-1$		$+$	0		$-$		
$f'(x)$		$+$	0		$-$		
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

4. Représentation graphique de f sur $[-4\pi ; 4\pi]$.



5. a. C'est une équation du second degré.

$\Delta = 5$. Les solutions sont $X_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b. α est solution de l'équation $f(x) = 0$ si, et seulement si, $= 0$.

$$\begin{array}{rcll}
\sin^2\alpha + \cos\alpha & = & 0 & \\
1-\cos^2\alpha + \cos\alpha & = & 0 & \text{Car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\
-\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1 & = & 0 & \\
\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 & = & 0 & \\
X^2 - X - 1 & = & 0 & \text{En posant } X = \cos\alpha
\end{array}$$

Par conséquent, α est solution de l'équation $f(x) = 0$ si, et seulement si, $\cos\alpha$ est solution de (E).

c. $X_1 \notin [-1\ ;\ 1]$, donc $\cos\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
En utilisant la calculatrice, on obtient $\alpha \simeq 2,237$.

Exercice 3

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas puisque $2 + \cos x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\overbrace{3\cos x}^{u'(x)}\overbrace{(2+\cos x)}^{v(x)} - \overbrace{3\sin x}^{u(x)}\overbrace{(-\sin x)}^{v'(x)}}{\underbrace{(2+\cos x)^2}_{(v(x))^2}} \\
&= \frac{6\cos x + 3\cos^2 x + 3\sin^2 x}{(2+\cos x)^2} \\
&= \frac{6\cos x + 3(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(2+\cos x)^2} \\
&= \frac{6\cos x + 3}{(2+\cos x)^2}
\end{aligned}$$

$f'(x)$ est du signe de $6\cos x + 3$ sur $[0\ ;\ \pi]$ soit du signe de $\cos x + \dfrac{1}{2}$. Or :

— sur $\left[0\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right[$, $\cos x > -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \dfrac{1}{2} > 0$;

— sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$, $\cos x < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \dfrac{1}{2} > 0$.

Et $f'(x)$ ne s'annule qu'en $\dfrac{2\pi}{3}$.
D'où le tableau de variation ci-contre.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

2. $f(-x) = \dfrac{3\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \dfrac{-3\sin x}{2+\cos x} = -\dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = -f(x)$ donc f est impaire.

On peut donc limiter l'étude de f à $[0\ ;\ \pi]$. On peut en déduire que la fonction f est décroissante sur $[-\pi\ ;-2\dfrac{\pi}{3}]$ et sur $[2\dfrac{\pi}{3}\ ;\pi]$ et croissante sur $[-\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}]$.

3. $f(x+2\pi) = \dfrac{3\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = f(x)$ donc f est 2π-périodique.

4. On trace $\mathscr{C}$ sur $[0\ ;\ \pi]$ puis sur $[-\pi\ ;\ 0]$ par symétrie centrale puisque f est impaire.
Enfin, comme f est 2π-périodique, on répète le motif tous les 2π par translation.