MATHEMATIQUES
Fonctions trigonométriques : QCM (corrigé)

Exercice 1

- f est définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0 et :
$f(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\dfrac{\cos x}{\sin x} = -f(x)$.
f est donc impaire.

- $f(x+\pi) = \dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \dfrac{-\cos x}{-\sin x} = f(x)$.
f est π-périodique.

- $f(x+2\pi) = \dfrac{\cos(x+2\pi)}{\sin(x+2\pi)} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = f(x)$.
f est donc 2π-périodique.

Remarque
Avant d'étudier la parité d'une fonction, on s'assure que son ensemble de définition est bien symétrique par rapport à 0.

Réponse : b. c. et d.

Exercice 2

- $\underbrace{\sin(4\pi - x) = \sin(-x)}_{\sin(x+2k\pi)=\sin x} = -\sin x$.

- $\underbrace{\cos(3\pi - x) = \cos(\pi - x)}_{\cos(x+2\pi)=\cos x} = -\cos x$.

- $\underbrace{\cos(2x+\pi) = -\cos 2x}_{\cos(X+\pi)=-\cos X}$.

- Pour tout $x \neq k\pi$:
$\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{-\cos x}{\sin x}$

Ne pas les apprendre
$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.
$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$.
Ces formules se retrouvent sur un graphique. Ne les apprenez pas par coeur.

Réponse : b. et c.

Exercice 3

$$\begin{aligned}
\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right) &= \cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}-2\pi\right)+\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{2}+2\pi\right) \quad \text{Car } \cos(x+2\pi)=\cos x \text{ et } \sin(x+2\pi)=\sin x \\
&= \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin\theta+\cos\theta \quad \text{Car } \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta \text{ et } \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta
\end{aligned}$$

Réponse : a.

Exercice 4

L'équation $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$ s'écrit $\sin 3x = \sin \dfrac{\pi}{6}$.

Cette équation a pour solution dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 3x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k'\pi = \dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } k' \in \mathbb{Z}.$$

soit :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2k'\pi}{3} \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } k' \in \mathbb{Z}.$$

Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, les solutions sont $\dfrac{\pi}{18}$ (avec $k=0$), $\dfrac{13\pi}{18}$ (avec $k=1$), $\dfrac{-11\pi}{18}$ (avec $k=-1$), $\dfrac{5\pi}{18}$ (avec $k'=0$), $\dfrac{17\pi}{18}$ (avec $k'=1$) et $\dfrac{-7\pi}{18}$ (avec $k'=-1$)

Donc $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{11\pi}{18}\ ;\ -\dfrac{7\pi}{18}\ ;\ \dfrac{\pi}{18}\ ;\ \dfrac{5\pi}{18}\ ;\ \dfrac{13\pi}{18}\ ;\ \dfrac{17\pi}{18}\right\}$

Méthode

On se ramène à une équation du type :

$$\sin(\text{truc}) = \sin(\text{machin})$$

qu'on sait résoudre.
Pour avoir les solution dans $[-\pi\ ;\ \pi[$, on prend les valeurs de k et k' qui "conviennent".

Réponse : d.

Exercice 5

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$f'(x) = \dfrac{1}{3} \times (-\sin x) - \cos x = \dfrac{-\sin x}{3} - \cos x$.

Evidemment

$\dfrac{\cos x}{3} = \dfrac{1}{3}\cos x$.

- $f(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{3} - \sin(-x) = \dfrac{\cos x}{3} + \sin x \neq f(x)$.

Donc f n'est pas paire.

- $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)}{3} - \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{3} - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{6}$.
- $f(x+2\pi) = f(x)$. Donc f est 2π périodique.

Réponse : b. et c.

Exercice 6

Avec l'image de 0, on obtient $\cos 0 = 1$. Donc cos est représenté par Ψ.

$-\cos 0 = -1$, donc $-\cos$ est représenté par Λ.

Avec l'image de $\dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. Donc sin est représentée par Γ.

$-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$. Donc $-\sin$ est représentée par Φ.

Méthode

L'image de 0 ne permet pas de comparer les autres fonctions car $\sin 0 = -\sin 0 = 0$. On prend $\dfrac{\pi}{2}$.
Si on connaît les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus on retrouve déjà ces deux-là et ensuite on peut utiliser le fait que les représentations graphiques de deux fonctions opposées sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Réponse : b.