MATHEMATIQUES
Fonctions trigonométriques : sujet savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

Comment faire ?

Pour résoudre ces équations, on se ramène à ce que l'on sait faire. Ce que l'on sait résoudre ce sont les équations du type $\cos x = \cos a$ ou $\sin x = \sin a$.
Pour cela on transforme l'équation.
Ensuite on donne les solutions dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$. Vous pouvez également faire un petit schéma pour vous repérer.

• $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

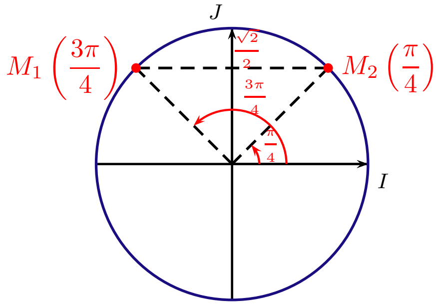
Cette équation s'écrit $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{4}$.
Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont données par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k'\pi \quad \text{avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k'\pi \quad \text{avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ les solutions sont : $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

Dans $[0\ ;\ 2\pi[$ les solutions sont : $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.



Remarques

Dans $\mathbb{R}$, cette équation a une infinité de solutions.
En prenant $k = 0$ et $k' = 0$, on obtient les solutions dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ et dans $[0\ ;\ 2\pi[$.

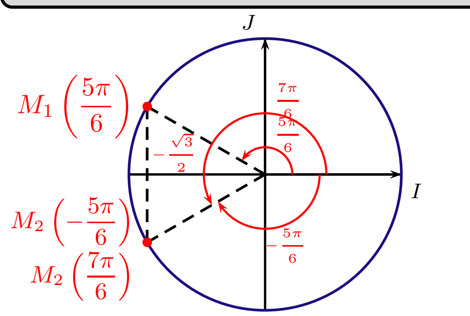
• $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Cette équation s'écrit $\cos x = \cos \dfrac{5\pi}{6}$.
Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont données par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi \quad \text{avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ les solutions sont : $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{-5\pi}{6}$.

Dans $[0\ ;\ 2\pi[$ les solutions sont : $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{7\pi}{6}$.



Remarque

En prenant $k = 0$ et $k' = 0$, on obtient les solutions dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.
En prenant $k = 0$ et $k' = 1$ on obtient les solutions dans $[0\ ;\ 2\pi[$.

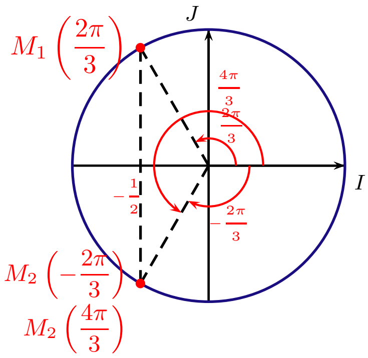
• $1 + 2\cos x = 0$.

Cette équation s'écrit $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ soit $\cos x = \cos \dfrac{2\pi}{3}$
Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont données par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi \quad \text{avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ les solutions sont : $\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Dans $[0\ ;\ 2\pi[$ les solutions sont : $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ (en prenant $k' = 1$).



• $1 - 2\sin x = 0$.

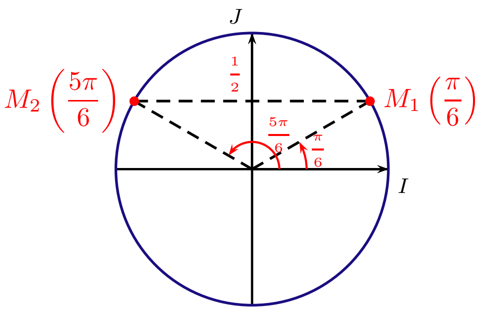
Cette équation s'écrit $\sin x = \dfrac{1}{2}$ soit $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{6}$
Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont données par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k'\pi \quad \text{avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Soit : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi \quad \text{avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ les solutions sont : $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

Dans $[0\ ;\ 2\pi[$ les solutions sont : $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.



Exercice 2

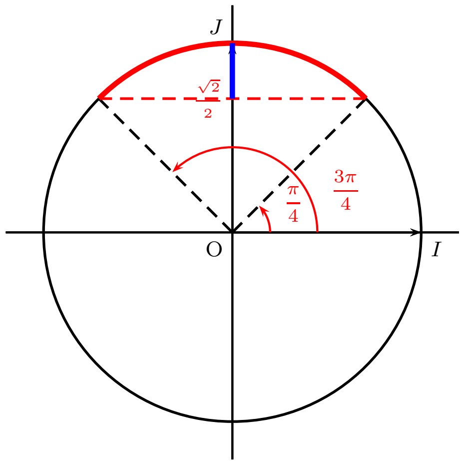
1. Résolution de l'inéquation $-2\sin x + \sqrt{2} < 0$.

Cette inéquation est équivalente à $-2\sin x < -\sqrt{2}$ soit $\sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$S = \left]\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\right[$.

Méthode

Commencez par écrire l'inéquation sous la forme $\sin x > a$. Puis, on place les points correspondants sur le cercle trigonométrique. Faites bien attention sur quel intervalle vous devez écrire les solutions !

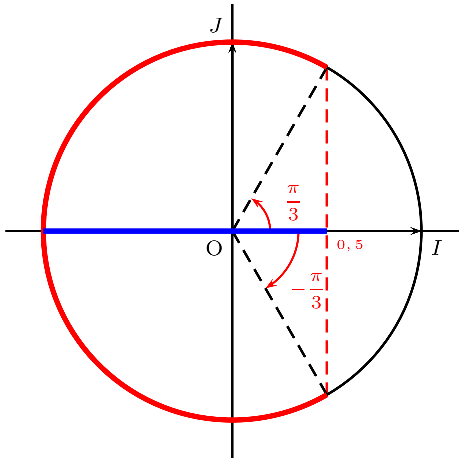


2. Résolution de l'inéquation $2\cos x - 1 \leqslant 0$.
Cette inéquation est équivalente à $2\cos x \leqslant 1$ soit $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$S = \left]-\pi\,;\,-\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$.

Attention

Comme je l'avais dit juste au-dessus, il faut faire attention à l'intervalle dans lequel on veut les solutions.
Décrivez l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ et écrivez les solutions.



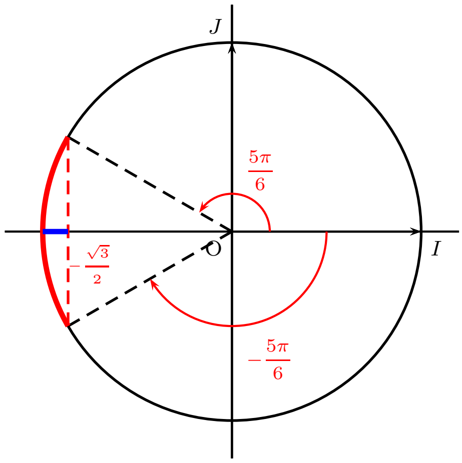
3. Résolution de l'inéquation $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant 0$.

Cette inéquation est équivalente à $\cos x \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$S = \left[-\pi\ ;\ -\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right[$.

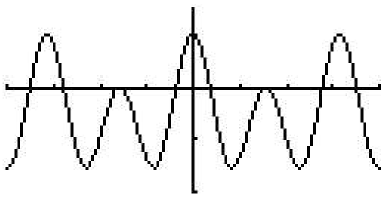
Attention

L'intervalle sur lequel on cherche les solutions est très important. Sur $[0\ ;\ 2\pi[$, les solutions de l'inéquation sont $\left[\dfrac{5\pi}{6}\ ;\ \dfrac{7\pi}{6}\right]$. Plus facile mais "moins marrant"..



Exercice 3

1. Courbe obtenue avec la calculatrice ($X_{\text{Min}} = -4$, $X_{\text{Max}} = 4$, $Y_{\text{Min}} = -2$ et $Y_{\text{Max}} = 1,5$) :



2. Parité de f.

$$\begin{array}{rcl} f(-x) & = & \cos(-4x) - \sin^2(-x) \\ & = & \cos(4x) - (-\sin(x))^2 \text{ Car } \cos(-x) = \cos(x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin(x) \\ & = & \cos(4x) - (\sin(x))^2 \\ & = & f(x) \end{array}$$

Notations

$\sin^2(x) = (\sin(x))^2$.
Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit $\sin(x) = \sin x$.

On en déduit que f est paire et donc que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. Graphiquement, , f semble admettre pour période π.

$$\begin{array}{rcl} f(x+\pi) & = & \cos(4(x+\pi)) - \sin^2(x+\pi) \\ & = & \cos(4x+4\pi) - (\sin(x+\pi))^2 \\ & = & \cos(4x) - (-\sin(x))^2 \quad \text{Car } \cos(X+2k\pi) = \cos(X) \text{ et } \sin(x+\pi) = -\sin(x) \\ & = & \cos(4x) - \sin^2(x) \\ & = & f(x) \end{array}$$

f est une fonction périodique de période π.

Exercice 4

1. f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \sqrt{3} \times (-\sin(x)) + \cos(x) \\ & = & -\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) \end{array}$$

Remarques

• La dérivée de $x \longmapsto \cos x$ est $x \longmapsto -\sin(x)$.
• La dérivée de $x \longmapsto \sin x$ est $x \longmapsto \cos(x)$.
Inutile de vous dire qu'il faut les connaître par coeur !

2. La fonction g est un quotient de deux fonctions.
g est dérivable sur $]0\ ;\ \pi[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]0\ ;\ \pi[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0\ ;\ \pi[$.

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = \cos x$ et $v(x) = \sin x$.

Rappels

$u'(x) = -\sin x$ et $v'(x) = \cos x$.

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & \dfrac{\overbrace{-\sin x}^{u'(x)} \times \overbrace{\sin x}^{v(x)} - \overbrace{\cos x}^{u(x)} \times \overbrace{\cos x}^{v'(x)}}{\underbrace{(\sin x)^2}_{(v(x))^2}} \\ & = & \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x)^2} \\ & = & \dfrac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x)^2} \\ & = & \dfrac{-1}{\sin^2 x} \end{array}$$

3. h est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
On utilise donc la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.

$$\begin{array}{rcl} h'(x) & = & \overbrace{\cos(x)}^{u'(x)} \times \overbrace{\cos(x)}^{v(x)} + \overbrace{\sin(x)}^{u(x)} \times \overbrace{(-\sin(x))}^{v'(x)} \\ & = & \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{array}$$

On peut encore réduire

$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

Exercice 5

• f est π-périodique :
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(x+\pi) = \cos\left[2(x+\pi)\right] - \dfrac{1}{2}$
$= \cos\left[2x+2\pi\right] - \dfrac{1}{2}$
$= \cos 2x - \dfrac{1}{2}$
$= f(x)$
Donc la fonction f est π-périodique.

• f est paire :
L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(-x) = \cos(-2x) - \dfrac{1}{2}$
$= \cos 2x - \dfrac{1}{2}$
$= f(x)$

Donc la fonction f est paire.

Pairité

Comme f est paire, sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

• La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On pose $u(x) = 2x$.
Donc $u'(x) = 2$.
Ainsi $f'(x) = u'(x)\left(-\sin u(x)\right)$.
Donc $f'(x) = -2\sin 2x$.
Comme f est π-périodique, on peut limiter l'étude à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. On aura le "reste" par translation.

Comme f est est paire, on peut limiter l'étude à l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. On aura le "reste" par symétrie.

Soit $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
On a : $f'(x) = -2\sin 2x$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & < & 0 \\ -2\sin 2x & < & 0 \\ \sin 2x & > & 0 \\ 0 < & 2x & < \pi \\ 0 < & x & < \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Par symétrie, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$.

De plus $f(0) = \cos 0 - \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

En outre $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\pi - \dfrac{1}{2} = -1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

Et enfin $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(-\pi) - \dfrac{1}{2} = -1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

On obtient alors le tableau de variation suivant.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$

Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et par translation de vecteur $\pi\overrightarrow{i}$, on obtient la courbe représentative suivante.