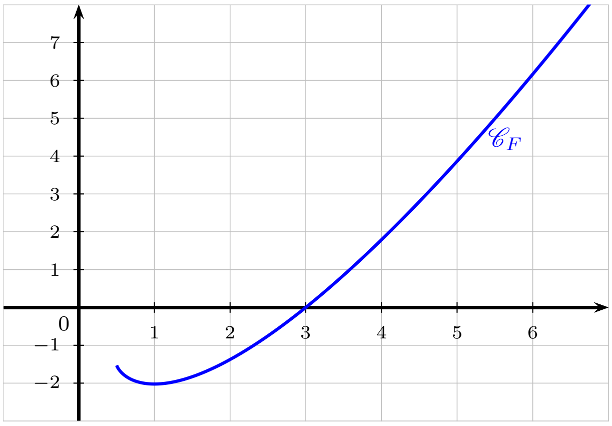
MATHEMATIQUES

Intégration : entraînement (1)

Exercice 1



La courbe $\mathscr{C}_F$ ci-contre représente une fonction F définie et derivable sur l'intervalle $\mathrm{J} = [0,5\,;+\infty[$.
On sait que $\mathscr{C}_F$ coupe l'axe des abscisses au point $(3\,;0)$ et a une tangente horizontale au point $(1\,;-2)$.
On note f la fonction dérivée de F.

1. À l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de f.

2. Donner $f(1)$, $F(1)$ et $F(3)$. Préciser le signe de $f(3)$.

3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.

1. On pose $I = \int_0^1 3\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

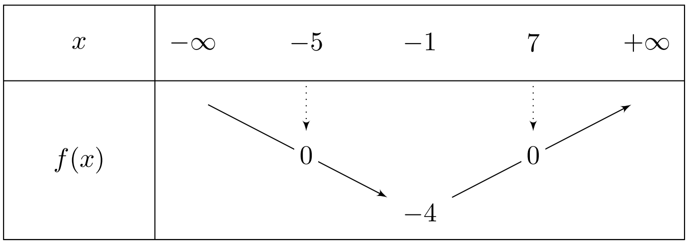
On peut affirmer que :

a. $I = \mathrm{e}^3 - 1$ **b.** $I = 3\mathrm{e}^3 - 3$ **c.** $I = 19,1$ **d.** $I = 1 - \mathrm{e}^3$

2. La valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

a. $3,19$ **b.** $\mathrm{e}^2 - 1$ **c.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^2$ **d.** $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$

3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :



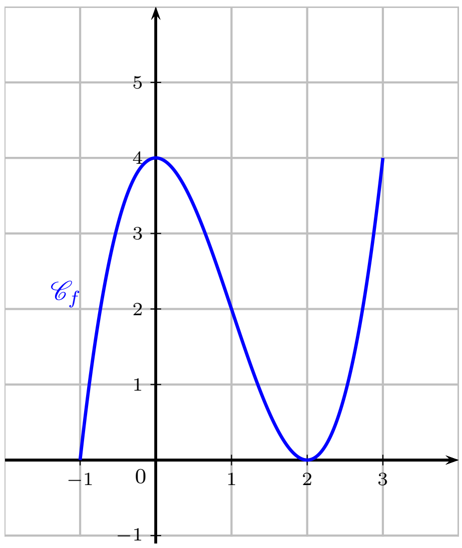
a. L'intégrale $\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$ est strictement positive.

b. L'intégrale $\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$ est strictement négative.

c. L'intégrale $\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$ est nulle.

d. Le tableau de variations ne permet pas de connaître le signe de l'intégrale $\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$, dont la représentation $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est proposée ci-contre.
On désigne par f' la fonction dérivée de f et par F une primitive de f.



4. **a.** $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < 0$

b. $3 < \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x < 6$

c. $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

d. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ est égale à 1.

5. **a.** f' est croissante sur l'intervalle $]-1\ ;\ 2[$.

b. F est croissante sur l'intervalle $]-1\ ;\ 2[$.

c. f est croissante sur l'intervalle $]-1\ ;\ 2[$.

d. $F(1) > F(2)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

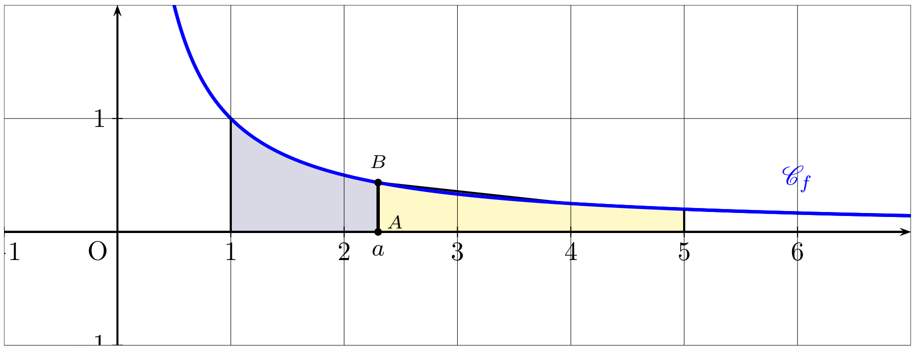
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentataive de f.

1. On pose :

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Etablir que $I = J$. Donner une interprétation de ce résultat en termes d'aires.

2. On nomme Δ la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.
Soit a un nombre réel compris entre 1 et 5 ; on note A le point de coordonnées $(a~;~0)$ et B le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(a~;~f(a))$.
Trouver la valeur exacte de a telle que le segment $[AB]$ partage Δ en deux parties d'aires identiques.



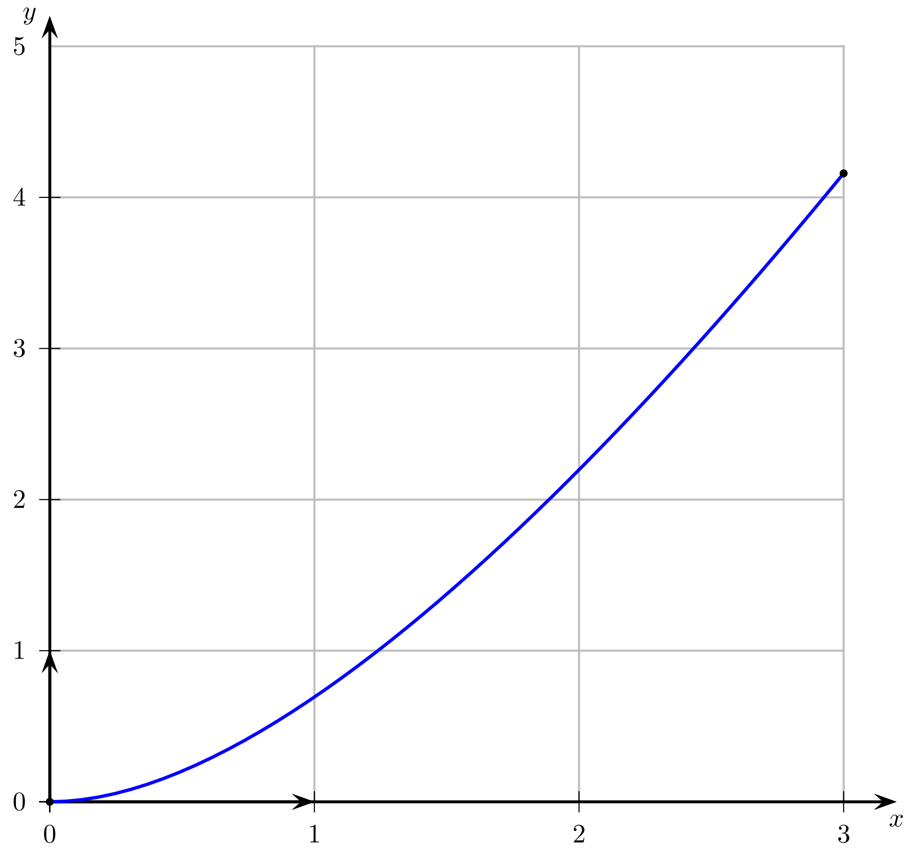
Exercice 4

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1).$$

Sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. L'axe des abscisses est-il tangent À la courbe $(\mathcal{C})$ au point O ?

2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

b. Calculer I.

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).