

Exercice 1

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a ; b]$.

$$I = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx.$$

- [illegible]

Exercice 2

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}.$$

- Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0; 1)$.
- Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1 . On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

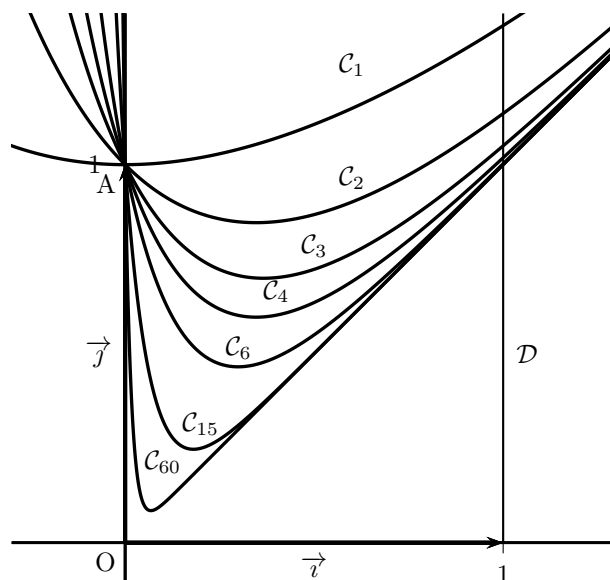
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) \, dx.$$

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé, pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + e^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.



- Interpréter géométriquement l'intégrale I_n .
 - En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.
- Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) \, dx.$$

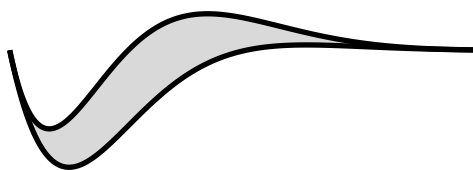
En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

- Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n) .

.....

Exercice 3

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x} \cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A — Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}.$$

2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2 \cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f .

4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

b. En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.

Partie B — Aire du logo

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées ci-dessous.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x}.$$

On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique ci-dessous.

b. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 .

