MATHEMATIQUES
Intégration : entraînement 3

Exercice 1

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f représentée ci-dessous dans un repère orthogonal du plan.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ telle que :

$$H(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont
— K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
— A, x et h des réels.

```
A ← 0
x ← 0
h ← 1/K
Pour i allant de 1 à K
    A ← A + h × f(x)
    x ← x + h
Fin Pour
```

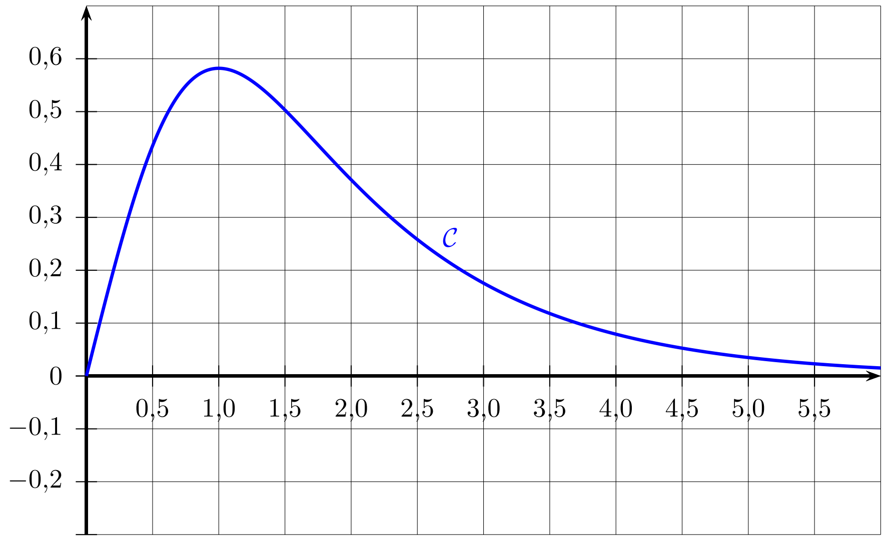
1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

i	A	x
1		
2		
3		
4		

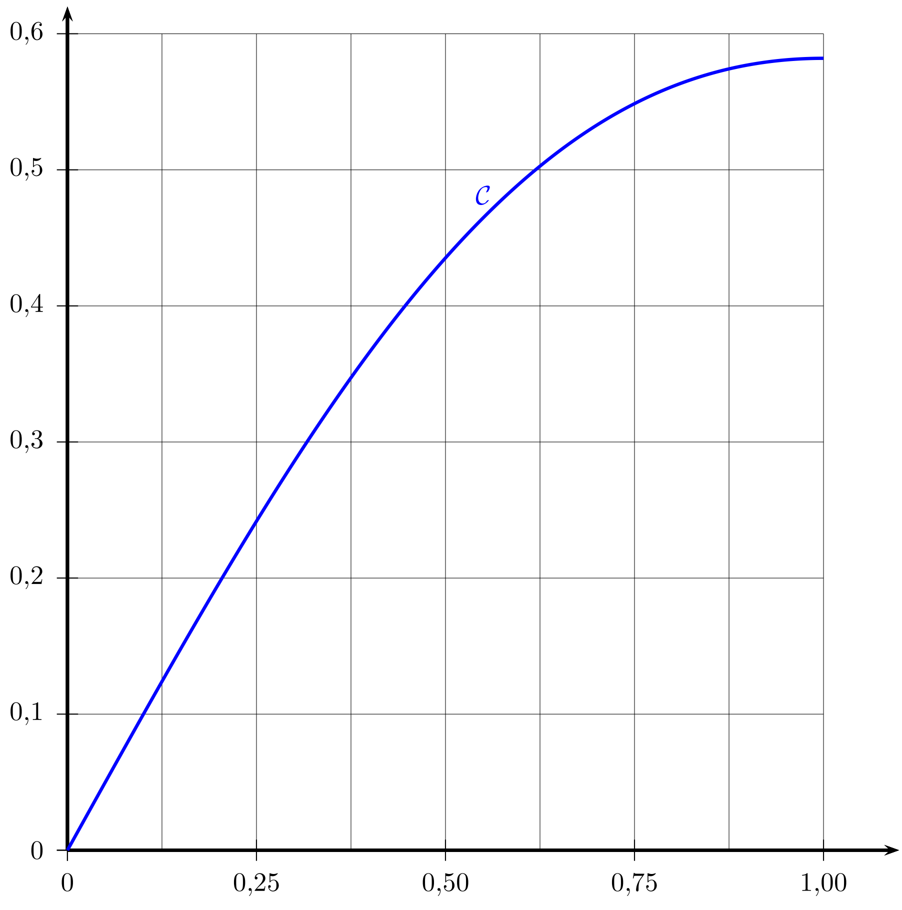
2. En l'illustrant sur le graphique ci-dessous, donner une interprétation graphique du nombre A obtenu après l'exécution de cet algorithme pour $K = 8$.

3. Que permet d'obtenir l'algorithme lorsque K devient grand ?

Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,6]$



Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,1]$



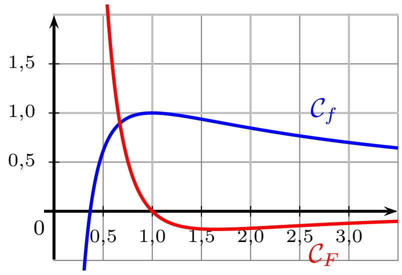
Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

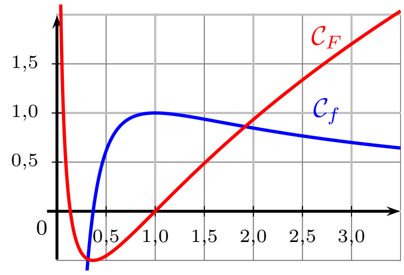
$$f(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

1. Dans les trois situations suivantes, on a dessiné, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et une courbe $\mathcal{C}_F$. Dans une seule situation, la courbe $\mathcal{C}_F$ est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.

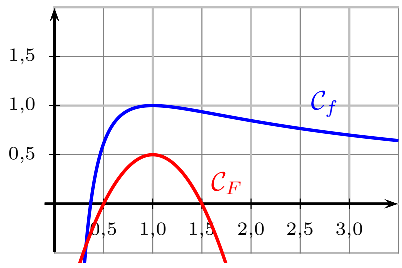
Situation 1



Situation 2



Situation 3



2. Dans la situation retenue à la question 1, on appelle :

— K le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathcal{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées ;

— L le point de $\mathcal{C}_f$ qui a pour abscisse l'abscisse du point en lequel la fonction f atteint son maximum et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

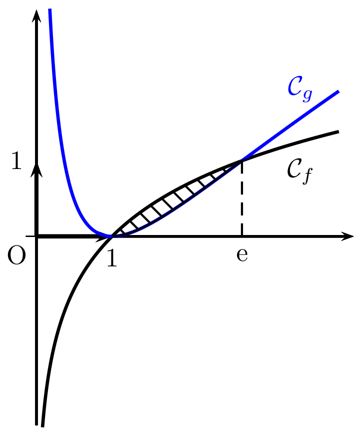
a. Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathcal{D}$ et Δ, par la courbe $\mathcal{C}_f$ et par l'axe des abscisses.

b. Peut-on déterminer la valeur exacte de cette aire ?

Exercice 3

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} - 2I$.

c. En déduire J.

d. Donner la valeur de $\mathcal{A}$.

2. Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.