MATHEMATIQUES
Intégration : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

a. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 2]$.
On étudie le signe de $2x^2 + 2x - 3$ à l'aide du discriminant. $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$.

Deux racines réelles $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.
On dresse le tableau de signes de f sur $[-4\ ;\ 2]$:

x	-4		-3		1		2
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Calcul de l'aire.

Explications

Lorsque f est positive sur $[a\ ;\ b]$, l'aire est $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ et lorsque f est négative sur $[c\ ;\ d]$, l'aire est $\displaystyle -\int_c^d f(x)\ \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathscr{D}) &= \int_{-4}^{-3} f(x)\ \mathrm{d}x - \int_{-3}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{-4}^{-3} - \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{-3}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{1}^{2} \\ &= \left(9 - \frac{20}{3}\right) - \left(-\frac{5}{3} - 9\right) + \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right) = 9 - \frac{20}{3} + \frac{5}{3} + 9 + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = 18 - \frac{8}{3} = \frac{46}{3} \simeq 15,33 u.a.\end{aligned}$$

Exercice 2

- On détermine dans un premier temps les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en résolvant sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$. $f(x) = g(x) \iff x^2 - x - 2 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$.

  Deux racines réels $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

  De plus, pour tout $x \in [-1\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant g(x)$.

Explications

L'aire est donnée par l'intégrale de la différence "fonction de dessus − fonction de dessous ". Donc il est important d'avoir cette comparaison entre f et g sur $[-1\ ;\ 2]$.

- On calcule l'aire du domaine $\mathscr{D}$ à l'aide d'une intégrale :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathscr{D}) &= \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = 4,5\ u.a.\end{aligned}$$

Exercice 3

1. a. On démontre cet encadrement en deux étapes :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- On étudie le signe de $\dfrac{1}{x^2+1} - (-x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x^2+1} - (-x^2+1) = \frac{1}{x^2+1} + x^2 - 1 = \frac{1}{x^2+1} + \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1+x^4-1}{x^2+1} = \frac{x^4}{x^2+1} \geqslant 0$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x^2+1} - (-x^2+1) \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{x^2+1} \geqslant -x^2+1$.

On en déduit l'encadrement $-x^2+1 \leqslant \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$.

b. On obtient en particulier sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$: $-x^2+1 \leqslant \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$ et donc :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (-x^2+1)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\ \mathrm{d}x \\
\iff &\left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \leqslant [x]_0^1 \\
\iff &\frac{2}{3} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \leqslant 1
\end{aligned}$$

2. Pour tout $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$: $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff 0 \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x \\
\iff &0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
\iff &0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant -\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \\
\iff &0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\pi} \simeq 0,637
\end{aligned}$$

Exercice 4

$\mu = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^3 (3x^2 - 6x + 1,5)\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} \times \left[x^3 - 3x^2 + 1,5x\right]_0^3 = \dfrac{1}{3} \times 4,5 = 1,5.$

On en déduit que le bénéfice moyen est de 1500 € pour une quantité x de produit, variant de 0 à 3 kg.