MATHEMATIQUES
Limites de fonctions : entraînement 1

Exercice 1

Soit f la fonction $x \longmapsto a + \dfrac{b}{x-c}$ où a, b et c sont des réels et dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\searrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

Le but de l'exercice est de déterminer a, b et c grâce à ce tableau.

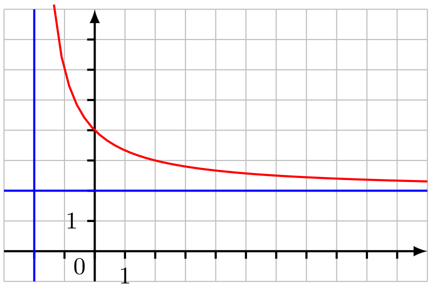
1. En observant le tableau, quel réel parmi a, b et c peut-on obtenir sans calcul ? Le donner.

2. À partir de l'expression $f(x) = a + \dfrac{b}{x-c}$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Quel deuxième réel cherché obtient-on ?

3. Déterminer le troisième réel cherché.

Exercice 2

La courbe ci-dessous représentative une fonction f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$. Les droites bleues sont des asymptotes.



On considère la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
Déterminer, à l'aide du graphique, les limites de g en -2 et en $+\infty$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 3

1. Compléter la phrase suivante :
En termes de recherche de limites, les quatre formes indéterminées sont : ......, ..., ... et ....

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -3$;
- Pour tout réel x, $h(x) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Compléter :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = ...$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) \times g(x)) = ...$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = ...$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) + h(x)) = ...$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) \times h(x)) = ...$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} = ...$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par sur $]-1\ ;\ 1[\cup]1\ \ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

Dresser le tableau de variations complet (avec les limites) de cette fonction et préciser les asymptotes éventuelles. Tous les résultats doivent être clairement justifiés.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 5

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.
Soient x un réel positif et P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$.
M désignant le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$, on appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre P qui passe par M. $\mathscr{C}$ coupant l'axe $(O;\vec{\imath})$ en deux points, on nomme A celui de ces deux points dont l'abscisse est inférieure à x.
Enfin, on considère la fonction f qui, à chaque réel x, associe la longueur du segment $[OA]$.

1. Établir que pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \sqrt{x^2+4} - x$.

2. Que peut-on dire de la distance OA lorsque x augmente indéfiniment ? Justifier.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....