MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : entraînement 1

Exercice 1
Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
Tant que N − ln(N² + 1) < A
        N ← N + 1
Fin Tant que
```

a. Que fait cet algorithme ?

b. Quelle est la valeur de N à la fin de l'exécution de l'algorithme lorsque la valeur de A en début d'exécution est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
En déduire la valeur de ℓ.

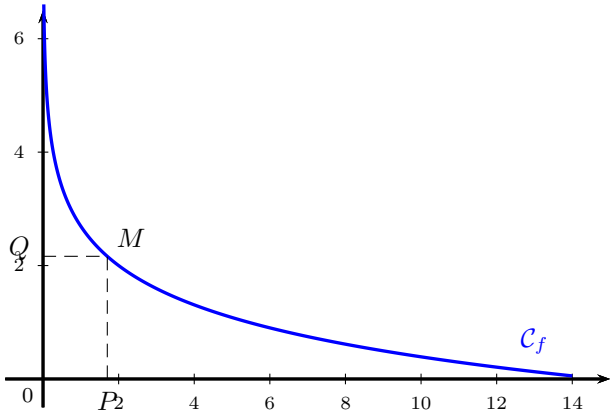
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathcal{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathcal{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.