MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : entraînement 2

Exercice 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n): \qquad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

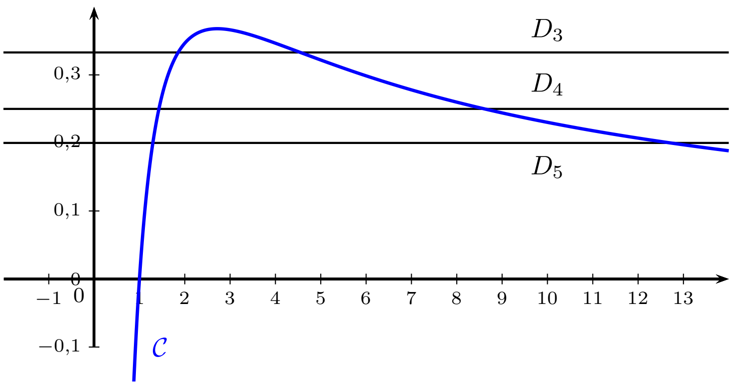
ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On a donne ci-dessous, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.



1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ notée α_n.

2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

a. Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

b. Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

c. En déduire que la suite (α_n) converge. *Il n'est pas demandé de calculer sa limite.*

3. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \beta_n.$$

a. On admet que la suite (β_n) est croissante.
Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

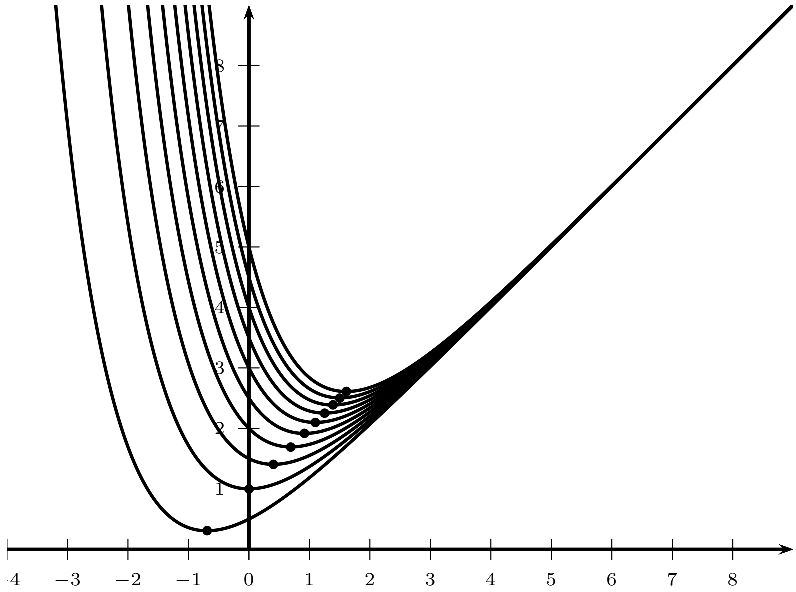
b. En déduire la limite de la suite (β_n).

Exercice 2

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?