MATHEMATIQUES
Loi des grands nombres : entraînement savoir-faire

Chapitre 15 : Loi des grands nombres.	**Evaluation**
150. Connaître et savoir utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	●● | ● | ● | ● | ●●
151. Connaître et savoir utiliser l'inégalité de concentration.	●● | ● | ● | ● | ●●

Exercice 1

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse.
On souhaite trouver une valeur approchée de cette proportion p.
On effectue alors un prélèvement de n pièces. On suppose que ce prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise.
On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses à l'issue des n prélèvements et on souhaite quantifier le fait que $\dfrac{S_n}{n}$ approche p.

1. a. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ?

b. Déterminer son espérance, sa variance et son écart type en fonction de n et de p.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = x(1-x)$.

a. Étudier la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

b. En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, on a $f(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

3. Démontrer que, pour tout $a > 0$, on a $p\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{1}{4na^2}$.

4. En déduire une condtion sur n pour que $\dfrac{S_n}{n}$ soit une valeur approchée de la proportion p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....