MATHEMATIQUES
Loi binomiale : sujet d'entraînement 2

Exercice 1

Dans une population donnée, 24 % des individus sont fumeurs et, parmi ceux-ci, 40 % ont des difficultés respiratoires. On sait aussi que, dans cette population, 21 % des individus ont des difficultés respiratoires.
On choisit au hasard une personne dans la population étudiée et on note :
F l'événement « la personne choisie fume »et R l'événement « la personne choisie a des difficultés respiratoires ».

1. Les événements F et R sont-ils indépendants ? Justifier.

2. Déterminer $p_{\overline{F}}(R)$.

3. On choisit au hasard 10 personnes de cette population et on suppose que la population est assez grande pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes qui fument parmi les 10 personnes.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b. Montrer que la probabilité (arrondie au millième) qu'il y ait au moins une personne qui fume est 0,936.

Exercice 2

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif. La probabilité que l'élève prtique le tri sélectif est $0,59$.
On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement.
Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les 4 élèves interrogés. Le nombre d'élèves de l'établissement est suffisamment grand pour que l'on considère que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

2. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne pratique le tri sélectif.

3. Calculer la probabilité qu'au moins deux des quatre élèves interrogés pratiquent le tri sélectif.

Exercice 3

Un QCM comporte 8 questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte. Nabolos donne au hasard une réponse à chaque question.
On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X suit la loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité que Nabolos réponde correctement à exactement 2 questions (arrondir à 10^{-3} près).

Exercice 4

Une usine de tissage fabrique des rouleaux de tissu pour un atelier de confection. Les rouleaux sont livrés par camion de 100 rouleaux.
La probabilité pour qu'un rouleau soit défectueux à la livraison est de 0,03. On vide le camion chez le client.
On appelle X la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de rouleaux défectueux de ce camion.

1. X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer à 0,001 près les probabilités des évènements suivants :

a. A : « le camion ne contient aucun rouleau défectueux. »

b. B : « le camion contient exactement un rouleau défectueux »

c. C : « le camion contient au plus deux rouleaux défectueux »

d. D : « Le camion contient au moins 7 rouleaux défectueux »

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 5

Une association sportive comporte une proportion de femmes notée p, où p est un réel de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
De plus, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis.

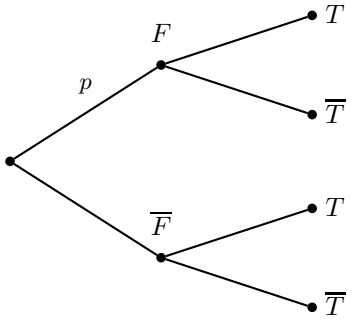
On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

- PARTIE A -

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'évènement « le membre choisi est une femme »,
- T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $\dfrac{2}{5}$.

3. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

- PARTIE B -

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.

c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.

- PARTIE C -

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon successive sans remise deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

1. Compléter, en justifiant le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	...	15	....
$P(X = x_i)$	....	$\dfrac{2}{11}$	....

2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.